IKKI O'LCHOVLI PARABOLIK TIPDAGI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISH ALGORITMLARI VA SONLI NATIJALARNI MODELINI ISHLAB CHIQISH.

QARSHI DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

A. B.Ochilova[1],
J.N.Boybo'riyev[2]

Abstrakt Bugungi kunga kelib xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishning hisoblash usullari rivoji va zamonaviy hisoblash texnikalarining takomillashishi hisobiga bir qancha yutuqlarga erishilmoqda. Yana shuni alohida ta'kidlash lozimki, hozirgi kunda issiqlik almashinish jarayonlarini sonli modellashtirish zamonaviy fan va texnika uchun ishonchli taxminlarni eksperimentlar yo'li bilan laboratoriya va tabiiy sharoitda o'rganish juda murakkab, qimmat va ba'zi hollarda umuman mumkin bo'lmaganligi uchun muhim ahamiyat kasb etib bormoqda.

Kalit so'zlar Temperatura, konveksiya va nurlanish, differensial tenglama, issiqlik o'tkazuvchanlik.

DEVELOPMENT OF ALGORITHMS FOR SOLVING TWO-DIMENSIONAL PARABOLIC-TYPE DIFFERENTIAL EQUATIONS AND MODELING NUMERICAL RESULTS.

KARSHI STATE TECHNICAL UNIVERSITY

A.B.Ochilova[1],
J.N.Boybo'riyev[2]

Abstract — To date, a number of achievements have been made due to the development of computational methods for solving boundary value problems for partial differential equations and the improvement of modern computational techniques. It should also be noted that numerical modeling of heat transfer processes is currently gaining importance for modern science and technology, since it is very difficult, expensive, and in some cases impossible to obtain reliable estimates experimentally in laboratory and natural conditions.

Key words — Temperature, convection and radiation, differential equations, thermal conductivity.

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ.

КАРШИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

A.B.Ochilova[1],

J.N.Boybo‘riyev[2]

Анатасия — К настоящему времени достигнут ряд успехов благодаря развитию вычислительных методов решения краевых задач для уравнений в частных производных и совершенствованию современных вычислительных технологий. Следует также отметить, что численное моделирование процессов теплопередачи в настоящее время приобретает все большее значение для современной науки и техники, поскольку получение надежных оценок путем экспериментов в лабораторных и натурных условиях весьма затруднительно, затратно, а в ряде случаев и невозможно.

Ключевые слова Температура, конвекция и излучение, дифференциальные уравнения, теплопроводность.

Kirish

Ikki o’lchovli parabolik tipdagi tenglamalarni yechish jarayonini o‘rganish hamda uni texnika va tabiiy bilimlar rivojida qo’llash muhim o‘rinni egallab kelmoqda. Bu kabi differensial tenglamalarni aviatsiya, atom energetikasi, kosmik raketalar texnikasi rivoji issiqlik almashinuvning yanada yangi masalalarini yechishda hamda shu bilan birga mavjud va yangi nazariyalarga to‘lalik va ishonchlilik shartlarini qat’iy talab asosida ishlab chiqilmoqda. XXI asrga kelib esa issiqlik almashinish hodisalarining tadqiqi va qo‘llanilishi jadalligi doirasi keskin kengaytirish maqsadida ushbu malalardan keng foydalanilmoqda. Hozirda bu masalalar texnika (kimyoviy texnologiya, metallurgiya, qurilish ishlari, neftni qayta ishlash, mashinasozlik, agrotexnika va hokazo) va asosiy tabiiy fanlar (biologiya, geologiya, atmosfera va okean fizikasi va hokazo)ning yetakchi yo‘nalishiga kiradi. Hozirgi kunda issiqlik almashinuvi jarayonlarining nazariy tadqiqi differensial masalalarning natijalarini maxsus texnik dasturiy ta’minot yordamida sonli modellashtirishga asoslangan. Bugungi kunga kelib xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishning hisoblash usullari rivoji va zamonaviy hisoblash texnikalarining takomillashishi hisobiga ana shunday yutuqlarga erishilmoqda. Yana shuni alohida ta’kidlash lozimki, hozirgi kunda issiqlik almashinish jarayonlarini sonli modellashtirish zamonaviy fan va texnika uchun ishonchli taxminlarni eksperimentlar yo‘li bilan laboratoriya va tabiiy sharoitda o‘rganish juda murakkab, qimmat va ba’zi hollarda umuman mimkin bo‘lmaganligi uchun muhim ahamiyat kasb etib bormoqda. Issiqlik almashinish jarayonlarini ikki o’lchovli differensial masalalar natijalari orqali sonli modellashtirish har xil ilimiy-tadqiqot, loyihalashtiriah va ishlab chiqarish ishlarida amaliyotda muvaffaqiyatli qo‘llanilib kelinmoqda. Quyida parabolik tipdagi tenglamali chegaraviy masalalarini chekli ayirmalar usuli yordamida sonli yechishning qisqacha nazariy asoslari, mustaqil o‘zlashtirishga oid adabiyotlarlardan keng miqiyoda qo’llash hamda ulardan foydalanishga imkon yaratmoqda. Differensial tenglamalar - noma’lum funksiyalar, ularning turli tartibli hosilalari va erkli o‘zgaruvchilar ishtirok etgan tenglamalar. Bu tenglamalarda noma’lum funksiya i orqali belgilangan bo‘lib, birinchi ikkitasida i bitta erkli o‘zgaruvchi t ga, keyingilarida esa mos ravishda x, t va x, u, z erkli o‘zgaruvchilarga bog‘liqdir. Differensial tenglama nazariyasi 17-asr oxirida differensial va integral hisobning paydo bo‘lishi bilan bir vaqtda rivojlana boshlagan. Differensial tenglama matematikada, ayniqsa, uning tatbiklarida juda katta ahamiyatga ega. Fizika, mexanika, iqtisodiyot, texnika va boshqa sohalarning turli masalalarini tekshirish differensial tenglamani yechishga olib keladi.

Xususiy hosilali differensial tenglama bu tenglamalarning oddiy differensial tenglamadan farqli muhim xususiyati shundan iboratki, ularning barcha yechimlari to‘plami, ya’ni "umumiy yechimi" ixtiyoriy o‘zgarmaslarga emas, balki ixtiyoriy funksiyalarga bog‘liq bo‘ladi; umuman, bu ixtiyoriy funksiyalarning soni differensial tenglamaning tartibiga teng; ularning erkli o‘zgaruvchilari soni esa izlanayotgan yechim o‘zgaruvchilari sonidan bitta kam bo‘ladi. Bir noma’lumli 1-tartibli xususiy hosilali.

Tadqiqot motodologiyasi

Differensial tenglamani yechish oddiy differensial tenglama sistemasini yechishga olib keladi. Tartibi birdan yuqori bo‘lgan xususiy hosilali differensial tenglama nazariyasida Koshi masalasi bilan bir katorda turli chegaraviy masalalar tekshiriladi. Issiqlik o‘tkazuvchanlik nazariyasining chiziqli chegaraviy masalalarini yechish uchun qo‘llaniladigan usullar:

Klassik usullar: o‘zgaruvchilarni ajratish usuli (Furye usuli); manba funksiya- lari (Grin funksiyasi) usuli; issiqlik potensiallari usuli;

Integral akslantirishlar usullari: cheksiz limitlarda; chekli limitlarda (bularda integral akslantirish yadrosi jismning shakli va chegaraviy shartlarga qarabhar xil tanlanadi);

Issiqlik o‘tkazuvchanlik nazariyasining nochiziqli chegaraviy masalalariniyechish uchun qo‘llaniluvchi usullar:

Variatsion usullar: Rits usuli; L.V.Kantorovich usuli; Treffts usuli; Bio usuli; Kurant usuli; Leybenzon usuli;

Chiziqlilashtirish usullari (nochiziqli chegaraviy masalani chiziqliga keltirish): o‘rniga qo‘yish usullari (algebraik va integral); chiziqlilashtirish uslublari; ketma-ket yaqinlashishlar usullari; qo‘zgalishlar usuli (kichik para- metr usuli);

Chegaraviy masalani boshqa turdagi tenglama va masalalarga keltirish usul- lari: nochiziqli chegaraviy shartlar bilan berilgan chegaraviy masalalarni unga ekvivalent bo‘lgan nochiziqli funksional tenglamalarga, temperaturadan bog‘liq bo‘lgan uzatish koeffisiyenti bilan berilgan chegaraviy masalani nochiziqli integral tenglamalarga, issiqlik o‘tkazuvchanlikning chegaraviy masalasini oddiy differensial tenglamali chegaraviy masalaga keltirish.

Keltirilgan usullarning bu klassifikatsiyasi shartli, chunki ba’zi usullar bir vaq- tning o‘zida bir necha usullar guruhlariga kirishi mumkin, ba’zilari esa ushbu klassi- fikatsiyaga kirmay qolmoqda.

Quyidagi ikki o'lchovli parabolik tipdagi differensial tenglamaga qo'yilgan chegaraviy masalani sonli usullardan foydalanib yechish kerak bo'lsin. Soddalashtirish uchun quyidagicha chegaraviy masalada qaralayotgan sohani $G\{0<x<1,\ 0<y<1\}$ deb olaylik. U holda chegaraviy masala matematik modelini quyidagicha yozishimiz mumkin.

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+f(x,y) \qquad (1)$$

Umumiy holda boshlang'ich va chegara shartlarini quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{cases} -\left.\dfrac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=0}=\alpha(P_A-P), & x=0; \\ \left.\dfrac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=1}=\alpha(P_B-P), & x=1; \\ -\left.\dfrac{\partial P}{\partial y}\right|_{y=0}=\alpha(P_C-P), & y=0; \\ \left.\dfrac{\partial P}{\partial y}\right|_{y=1}=\alpha(P_D-P), & y=1; \end{cases} \quad P(x,y,t)=\phi(x,y), \qquad t=0;$$

(2)

(3)

bu yerda

- P – izlanayotgan, qiymati hisoblanuvchi funksiya;
- $P_A,\ P_B,\ P_C,\ P_D$ - P funksiyaning chegaradagi qiymati;

$$\alpha=\begin{cases}0, & \textit{chegara mahkamlangan}\\ 1, & \textit{chegara mahkamlanmagan.}\end{cases}$$

Olingan natijalarni to'g'riligini va matematik modelning addekvatligini tekshirish maqsadida chegaraviy masalaning analitik yechimini quyidagicha olamiz

$$P(x,y,t)=e^{-2xyt}.$$

U holda chegaraviy va boshlang'ich shartlar quyidagicha bo'ladi

$$\begin{cases} P(x,y,0)=1, \\ P(0,y,t)=1, \\ P(1,y,t)=e^{-2yt} \\ P(x,0,t)=1, \\ P(x,1,t)=e^{-2xt}, \end{cases} \tag{4}$$

$$f(x,y,t)=-2(2t^2(x^2+y^2))+xye^{-2xyt} \tag{5}$$

Chegaraviy masalani sonli usulda yechish uchun sohani quyidagi diskret sohaga almashtiramiz. Buning uchun quyidagi to'rni qo'ramiz.

$$\Omega_{h\tau}=\{x=ih, y=ih,\ i=0,1,...,N,\ h=\frac{1}{N},\quad t_j=j\tau,\ j=0,1,...,N_0,\quad \tau=\frac{1}{N_0}\}.$$

Bu diskret sohada masalani sonli usulda yechish uchun o'zgaruvchilarning yo'nalish sxemasiga asoslangan chekli ayirmalar usulini qo'llaymiz. Bu usulda bir vaqt qatlamidan ikkinchisiga o'tish 0.5τ qadam bilan ikki bosqichda amalga oshiriladi. Chekli ayirmali tenglamani operatorli formada *i, j* indekslarini tashlab, quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{P^{k+0.5}-P^k}{0.5\tau}=\Lambda_1 P^{k+0.5}+\Lambda_2 P^k+f(x,y,t), \tag{6}$$

$$\frac{P^{k+1}-P^{k+0.5}}{0.5\tau}=\Lambda_1 P^{k+0.5}+\Lambda_2 P^{k+1}+f(x,y,t). \tag{7}$$

U holda chekli ayirmali tenglamalar tizimi *k+0.5* va *k+1* vaqt qatlamlarida quyidagicha bo'ladi.

$$a_i P_{i-1,j}^{k+0.5}-b_i P_{i,j}^{k+0.5}+c_i P_{i+1,j}^{k+0.5}=-d_i, \tag{8}$$

$$a_j P_{i,j-1}^{k+1} - b_j P_{i,j}^{k+1} + c_j P_{i,j+1}^{k+1} = -d_j. \tag{9}$$

Bu yerda:

$$a_i = \frac{1}{h^2}; \qquad b_i = 2(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{\tau}); \qquad c_i = \frac{1}{h^2}; \tag{10}$$

$$d_i = \frac{2}{\tau} P_{i,j}^{k} + \frac{P_{i,j-1}^{k} - 2P_{i,j}^{k} + P_{i,j+1}^{k}}{h^2} + (-2(2t^2(x^2 + y^2)) + xye^{-2xyt}), \tag{11}$$

$$a_j = \frac{1}{h^2}; \qquad b_j = 2(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{\tau}); \qquad c_j = \frac{1}{h^2}; \tag{12}$$

$$d_j = \frac{2}{\tau} P_{i,j}^{k+0.5} + \frac{P_{i,j-1}^{k+0.5} - 2P_{i,j}^{k+0.5} + P_{i,j+1}^{k+0.5}}{h^2} + (-2(2t^2(x^2 + y^2)) + xye^{-2xyt}). \tag{13}$$

Chekli ayirmalar tizimining birinchi tenglamani (*k+0.5* vaqt qatlamida) yechish uchun progonka usulini ishlatamiz. Progonka usuliga ko‘ra uning sonli yechimi:

$$P_i = A_i P_{i+1} + B_i \quad (i = n-1,...,1) \tag{14}$$

formuladan aniqlanadi.

Bu yerda A_i, B_i - progonka koeffitsientlari bo‘lib, ular quyidagi formulalardan aniqlanadi:

$$A_i = \frac{c_i}{b_i + a_i A_{i-1}}; \qquad B_i = \frac{a_i B_{i-1} + d_i}{b_i + a_i A_{i-1}}; \tag{15}$$

Progonka koeffitsientlari boshlang'ich qiymatlari A_0, B_0 chegaraviy shartlardan aniqlanadi. Umumiy holdagi (3) birinchi chegaraviy shart uchun quyidagicha:

$$A_0 = \frac{b_1 - 4c_1}{a_1 - (3 - 2\Delta x)c_1}; \qquad B_0 = \frac{d_1}{a_1 - (3 - 2\Delta x)c_1}. \tag{16}$$

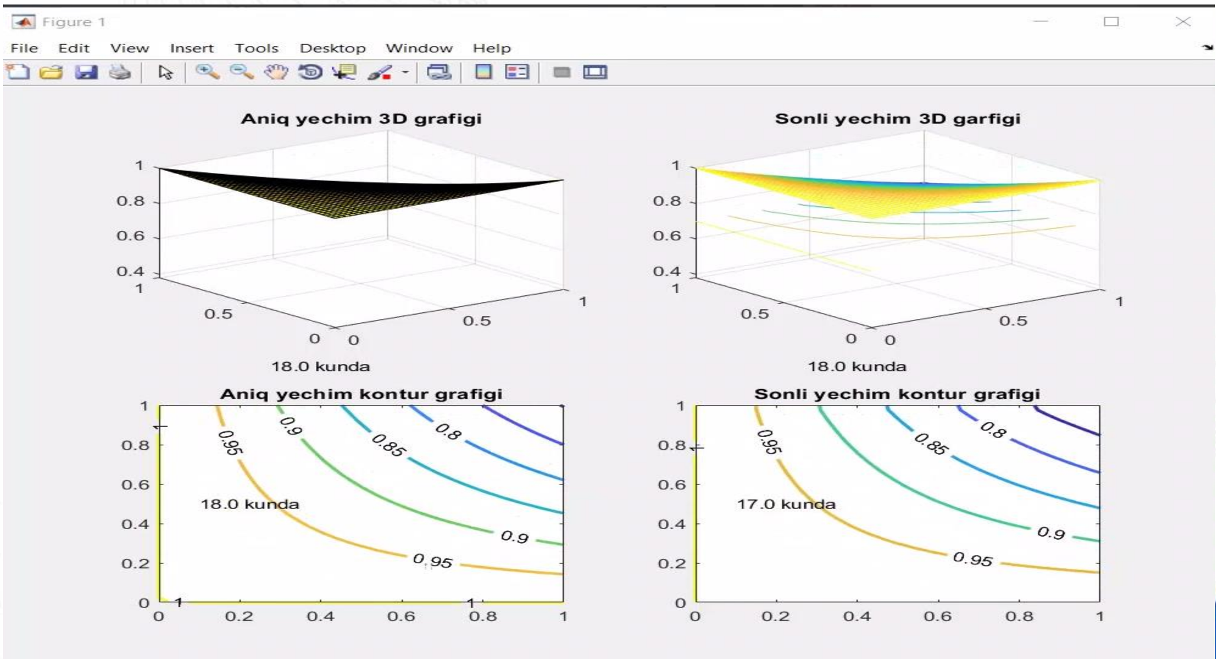
Yuqorida ishlatilgan aniq misol uchun (4) funksiya qiymati o'ng chegaradagi formula bilan aniqlanadi.

$$P_{N,j}^{k+0.5} = e^{-2yt}, \qquad A_0, B_0\,? \tag{17}$$

Xuddi shunday, bu sxema ikkinchi chekli ayirmali tenglamani yechish ($k+1$ vaqt qatlamida) uchun ham o'rinlidir.

Tahlil va natijalar

Hisob natijalari. Yuqorida keltirilgan misol asosida MATLAB dasturida model yaratildi, uning natijalari 1-rasmda tasvirlangan.



1-rasm. MATLAB dasturi hisobi natijalari.

XULOSA

Ikki o'lchovli parabolik differensial tenglamalarni yechish algoritmlari asosan sonli usullar asosida qurilgan bo'lib, ular fizik jarayonlarning aniq tavsiflari va real holatlar bilan moslashish uchun juda muhim. Farqlash va element metodlari bu tenglamalarni yechishda eng ko'p ishlatiladigan usullardir. Amaliyotda, turli xil dasturlar yordamida ushbu tenglamalar yechimi va model natijalari hisoblab chiqilib, natijalar tahlil qilinadi, shuningdek, bu model va yechimlar ilmiy tadqiqotlar hamda sanoat sohalarida keng qo'llaniladi.

FOYDALANILGAN VA MUSTAQIL O'ZLASHTIRISHGA OID ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Ravshanov N., Nazirova E. 2018 Numerical simulation of filtration processes of strongly polluted oil in a porous medium PONTE International Journal of Sciences and Research 74 107-116 CrossrefGoogle Scholar

2. Sadullayeva Sh.A. 2016 Numerical investigation of solutions to a reaction-diffusion system with variable density J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 9 90-101 https://doi.org/10.17516/1997-1397-2016-9-1-90-101 CrossrefGoogle Scholar

3. Martinenko A.V., Tedeev A.F.:On the behavior of solutions to the Cauchy problem for a degenerate parabolic equation with inhomogeneous density and a source. Comput. Math. Math. Phys. 48(7), 1145–1160 (2008) MathSciNetCrossRefGoogle Scholar

4. Ne'matov A.A., Nazirova E.Sh., Sadikov R.T. 2021 On numerical method for modeling oil filtration problems in piecewise-inhomogeneous porous medium. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/1032/1/012018

5. Ne'matov A.A., Nazirova E.Sh., Sadikov R.T., I. Nabiyev 2021 One-Dimensional Mathematical Model and a Numerical Solution Accounting

Sedimentation of Clay Particles in Process of Oil Filtering in Porous Medium. https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-030-68449-5_35

Mualliflar to‘g‘risida ma’lumot

Ochilova Aziza Bohodir qizi	Qarshi davlat texnika universiteti “Kompyuter tizimlarining dasturiy va texnik ta’minoti” kafedrasi assistenti E-mail:ao1234758@gmail.com Tel.:+998906669836