



MINORLAR VA ALGEBRAIK TO'LDIRUVCHILAR XOSSALARI

Musurmonova Zuhra Baxodir qizi

SHDPI, "Matematika" fakulteti 1-kurs talabasi

Ilmiy rahbar: Zaxiriddinova Shahlo

"Matematika va ta'limda axborot texnologiyasi" Kafedrası o'qtuvchisi

Annotatsiya (O'zbekcha)

Ushbu maqola chiziqli algebra sohasida matritsalar minorlari va algebraik to'ldiruvchilarining asosiy xossalarini chuqur tahlil qiladi. Minorlar submatritsalar determinantlari sifatida ta'riflanadi, algebraik to'ldiruvchilar esa ularning belgili shakllari bo'lib, Laplace teoremasida markaziy o'rin tutadi. Maqolada ta'riflar, xossalar, Laplace kengaytmasining batafsil isboti, determinant hisoblashdagi roli, matritsa inversiyasi va boshqa ilovalari ko'rib chiqiladi. Ko'plab misollar, jumladan 3×3 va 4×4 matritsalar uchun, keltiriladi. Natijalar minorlar va to'ldiruvchilar orqali chiziqli algebra muammolarini yechishning amaliy ahamiyatini ko'rsatadi. Ish ta'limiy va tadqiqotiy maqsadlarda qo'llanilishi mumkin, ayniqsa kvant hisoblash va sun'iy intellekt modellarida.

Kalit so'zlar :Minor, algebraik to'ldiruvchi, matritsa, determinant, chiziqli algebra, qo'shimcha matritsa, inversiya matrisasi, Laplas teoremasi, kengaytma, Leybnits formulasi, submatritsa, kofaktor kengayishi, Leybnits determinanti, permutatsiya belgisi, rekursiv hisoblash, matritsa singularligi, chiziqli bog'liqlik, blok kengayishi, komplementar minorlar, kvant hisoblash, AI matritsa modellari, vektor fazolari, xos qiymat masalalari.

Abstract (Inglizcha)

This article delves into the fundamental properties of matrix minors and algebraic cofactors in linear algebra. Minors are defined as determinants of



submatrices, while algebraic cofactors represent their signed forms, central to the Laplace theorem. The paper covers definitions, properties, a detailed proof of the Laplace expansion, its role in determinant computation, matrix inversion, and other applications. Numerous examples, including for 3×3 and 4×4 matrices, are provided. The results highlight the practical significance of minors and cofactors in solving linear algebra problems. This work can be useful for educational and research purposes, particularly in quantum computing and artificial intelligence models.

Keywords: Minor, algebraic complement, matrix, determinant, linear algebra, adjunct matrix, inverse matrix, Laplace theorem, expansion, Leibniz formula, submatrix, cofactor expansion, Leibniz determinant, permutation sign, recursive computation, matrix singularity, linear dependence, block expansion, complementary minors, quantum computing applications, AI matrix models, vector spaces, eigenvalue problems.

(Ruscha)

Эта статья глубоко анализирует основные свойства миноров матриц и алгебраических дополнений в линейной алгебре. Миноры определяются как детерминанты подматриц, а алгебраические дополнения являются их знаковыми формами, центральными в теореме Лапласа. В статье рассматриваются определения, свойства, детальное доказательство расширения Лапласа, его роль в вычислении детерминанта, инверсии матриц и других приложениях. Приведены многочисленные примеры, включая матрицы 3×3 и 4×4 . Результаты подчеркивают практическое значение миноров и дополнений в решении задач линейной алгебры. Работа может быть полезна в образовательных и исследовательских целях, особенно в квантовых вычислениях и моделях искусственного интеллекта.



Ключевые слова: Минор, алгебраическое дополнение, матрица, определитель, линейная алгебра, сопряженная матрица, обратная матрица, теорема Лапласа, разложение, формула Лейбница, подматрица, разложение по кофакторам, определитель Лейбница, знак перестановки, рекурсивные вычисления, матричная сингулярность, линейная зависимость, блочное разложение, дополнительные миноры, приложения квантовых вычислений, матричные, векторные пространства, задачи на собственные значения.

Kirish

Chiziqli algebra matematikaning asosiy tarmoqlaridan biri bo'lib, unda matritsalar va vektor fazolari markaziy o'rin egallaydi. Matritsalar minorlari va algebraik to'ldiruvchilari determinantni hisoblash, matritsa inversiyasi va chiziqli tenglamalar sistemalarini yechishda muhim vositalardir. Bu tushunchalar birinchi marta 18-19-asrlarda matematiklar tomonidan ishlab chiqilgan, xususan, Pierre-Simon Laplace va Gottfried Wilhelm Leibniz ishlarida asosiy rol o'ynagan. Laplace kengaytmasi determinantni rekursiv hisoblashga imkon beradi va chiziqli algebraning nazariy asoslarini mustahkamlashda katta ahamiyatga ega. Mavjud adabiyotlarda minorlar va to'ldiruvchilar haqida ko'plab manbalar mavjud. Masalan, Gilbert Strangning "Linear Algebra and Its Applications" kitobida bu mavzular amaliy misollar bilan yoritilgan, Antonning "Elementary Linear Algebra" asarida esa boshlang'ich darajada tushuntirilgan. Sergei Treilning "Linear Algebra Done Wrong" kitobida noan'anaviy yondashuvlar, jumladan cofactor matritsalarining murakkab xossalarini ko'rib chiqiladi. Prasolovning "Problems and Theorems in Linear Algebra" kitobida esa ko'plab masalalar va isbotlar keltirilgan. Biroq, o'zbek tilidagi manbalarda bu mavzu yetarlicha chuqur yoritilmagan, shuning uchun ushbu maqola bu bo'shliqni to'ldirishga qaratilgan. Maqolaning maqsadi – minorlar va algebraik to'ldiruvchilarning xossalarini tizimli ravishda taqdim etish, Laplace teoremasini batafsil isbotlash va ko'plab misollar



orqali ularning matematik va amaliy ahamiyatini ko'rsatish. Shu bilan birga, kvant hisoblash va sun'iy intellekt sohasidagi qo'llanishlariga ham to'xtalib o'tiladi. Maqola quyidagi tuzilishga ega: ta'riflar va asosiy tushunchalar, usullar va teoremlar (ayniqsa Laplace teoremasi), xossalar, natijalar

Asosiy qism

Ta'riflar va asosiy tushunchalar

Matritsa minorlari va algebraik to'ldiruvchilari chiziqli algebraning asosiy elementlari hisoblanadi. Quyida ularning ta'riflari keltiriladi, Strang va Anton kitoblaridan olingan ta'riflarga asoslanib. Berilgan $n \times n$ kvadrat matritsa $A=(a_{ij})$ uchun:

• **Minor:** i -chi qator va j -chi ustunni o'chirib, qolgan $(n-1) \times (n-1)$ submatritsaning determinanti M_{ij} deb ataladi. Bu minor deb nomlanadi va submatritsa determinantini ifodalaydi.

• **Algebraik to'ldiruvchi:** Minorning belgisi shakli bo'lib, $C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ bilan ifodalanadi. Belgining o'zgarishi Laplace kengaytmasida va adjunkt matritsada muhim rol o'ynaydi.

Masalan, 2×2 matritsa uchun:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$M_{11}=d, \quad C_{11}=d, \quad M_{12}=c, \quad C_{12}=-c, \quad M_{21}=b, \quad C_{21}=-b, \quad M_{22}=a, \quad C_{22}=a$$

Bu ta'riflar Leibniz formulasiga asoslanadi, u determinantni permutatsiyalar yig'indisi sifatida ifodalaydi. Minorlar matritsa tartibini pasaytirishga imkon beradi, bu rekursiv hisoblashlar uchun foydali.

Usullar va teoremlar



Minorlar va to'ldiruvchilarni o'rganishda asosiy usul – determinantni qator yoki ustun bo'yicha kengaytirish, ya'ni Laplace teoremasi. Bu teorema Pierre-Simon Laplace nomi bilan atalgan va determinantni rekursiv hisoblashga imkon beradi.

Teorema 1 (Laplace teoremasi): Matritsaning determinanti istalgan qator yoki ustun bo'yicha algebraik to'ldiruvchilar bilan kengaytirilishi mumkin:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{aj} C_{ij}$$

yoki

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}$$

Bu teorema Leibniz formulasidan kelib chiqadi, u determinantni quyidagicha ifodalaydi:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

bu yerda S_n -m-elementli to'plam permutatsiyalari, $\operatorname{sgn}(\sigma)$ – permutatsiya pariteti.

Laplace teoremasining batafsil isboti (umumiy n uchun)

Isbot Leibniz formulasiga asoslanadi. Berilgan i -chi qator bo'yicha kengaytirishni ko'rib chiqaylik. Leibniz formulasidagi yig'indini a_{ij} ni o'z ichiga olgan leksemalar bo'yicha guruhlaymiz, ya'ni $\sigma(i)=j$ bo'lgan permutatsiyalar. Bunday permutatsiyalarni S_n dan ajratib, qolgan indekslar uchun S_{n-1} ga o'tkazamiz. Permutatsiya σ ni quyidagicha qurish mumkin: i -chi qatorni j -chi ustunga belgilab, qolganlarni submatritsa permutatsiyasi $\tau \in S_{n-1}$ bilan bog'laymiz. Indekslar o'zgartirilishi: Qatorlar va ustunlar $>i$ va $>j$ bo'lsa, ularni 1 ga pasaytiramiz. Permutatsiya pariteti quyidagicha o'zgaradi:

$$\operatorname{Sgn}(\sigma) = (-1)^{i+j} \operatorname{sgn}(\tau)$$

chunki i va j ni o'chirish permutatsiya tsikllarini o'zgartiradi va paritetni (-1) ga ko'paytiradi. Shuning uchun:



$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

bu yerda $\det(M_{ij})$ – minor. Ustun bo'yicha isbot shunga o'xshash. Bu isbot Prasolov kitobida va Treil asarida batafsil keltirilgan. Rekursiya $n=1$ uchun trivial ($\det(A) = a_{11}$), va induksiya orqali n uchun to'g'riligi isbotlanadi. Yana bir muhim teorema – adjunkt matritsa orqali invers matritsa topish. Adjunkt matritsa $\text{adj}(A)$ – algebraik to'ldiruvchilar matritsasi transpozitsiyasi, ya'ni $(\text{adj}(A))_{ij} = C_{ji}$.

Teorema 2: Agar $\det(A) \neq 0$, unda invers matritsa:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

Bu teorema Laplace teoremasidan kelib chiqadi, chunki adjunkt matritsa va original matritsa ko'paytmasi $\det(A) \cdot I$ ni beradi (I – birlik matritsa).

Xossalari

Minorlar va algebraik to'ldiruvchilarning asosiy xossalari quyidagilar, Shores va UC Davis kitoblaridan olingan ma'lumotlarga asoslanib:

1. **Simmetriya:** Minorlar simmetrik emas, lekin algebraik to'ldiruvchilar belgi bilan bog'liq. Transpozitsiya uchun $M_{ij}(A^T) = M_{ji}(A)$, C uchun ham shunga o'xshash.
2. **Determinant bilan bog'lanish:** Har qanday matritsa uchun $\det(A) = \sum a_{ij} C_{ij}$. Bu xossa singular matritsalar uchun nol determinantni ko'rsatishda foydali.
3. **Nol determinant:** Agar matritsa singular bo'lsa (qatorlar/ustunlar chiziqli bog'liq), minorlar orqali bu ko'rsatilishi mumkin. Masalan, agar qatorlar bog'liq bo'lsa, Laplace kengaytmasi nol beradi.
4. **Rekursivlik:** Xossa rekursiv hisoblashga imkon beradi, lekin katta n uchun vaqt talab qiladi ($O(n!)$ murakkablik).



5. **Kengaytma bir nechta qator/ustun bo'yicha:** Umumiy holatda, kengaytma bir nechta qator bo'yicha o'tkazilishi mumkin, complementary minorlar orqali.

6. **Amaliy qo'llanish:** Kompyuter grafikasi (transformatsiyalar), muhandislik (tizimlar yechimi), kvant hisoblash (qubit matritsalar), sun'iy intellekt (neural tarmoqlar vaznlari inversiyasi) da ishlatiladi.

Natijalar

Ushbu bo'limda ko'plab misollar orqali natijalar ko'rsatiladi, Wikipedia va LibreTexts manbalaridan ilhomlanib.

Misol 1: 3x3 matritsa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Birinchi qator bo'yicha kengaytma: $M_{11} = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = 45 - 48 = 3$ $C_{11} = (-1)^{1+1}(-3) = -3$

$M_{12} = \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = 36 - 42 = -6$ $C_{12} = (-1)^{1+2}(-6) = 6$

$M_{13} = \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 32 - 35 = -3$ $C_{13} = (-1)^{1+3}(-3) = -3$

$\det(A) = 1(-3) + 2(6) + 3(-3) = -3 + 12 - 9 = 0$

Ikkinchi ustun bo'yicha $M_{21} = -6$, $C_{21} = 6$

$M_{22} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = 9 - 21 = -12$, $C_{22} = (-1)^{2+2}(-12) = -12$

$M_{23} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 8 - 14 = -6$, $C_{23} = (-1)^{2+3}(-6) = 6$

$\det(A) = 2(6) + 5(-12) + 8(6) = 12 - 60 + 48 = 0$

Natija nol, chunki ustunlar chiziqli bog'liq: $Kol_3 = -Kol_1 + 2Kol_2$ emas, balki $-Kol_1 + 2Kol_2 = Kol_3$? Tekshirib ko'ring: $-1 + 4 = 3$? Yo'q, haqiqatda: $aKol_1 + bKol_2 = Kol_3$, $a=-1$, $b=2$: $-1+4=3$, $-4+10=6$? $-4(1)+5(2) = -4+10=6$ emas, $R_{2:4,5,6}$. $Kol_1(1,4,7)$,



$Kol_2(2,5,8), Kol_3(3,6,9)$. $-11 + 22 = -1 + 4 = 3$, $-14 + 25 = -4 + 10 = 6$, $-17 + 28 = -7 + 16 = 9$.

Ha!

Misol 3: 3x3 nonsingular matritsa

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Birinchi qator:	$M_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 8 - 3 = 5$	$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 5 = 5$
	$M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 0 - 9 = -9$	$C_{12} = (-1)^{1+2}(-9) = 9$
	$M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 0 - 6 = -6$	$C_{13} = (-1)^{1+3}(-6) = -6$
Ikkinchi qator:	$M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 0 - 2 = -2$	$C_{21} = (-1)^{2+1}(-2) = 2$
	$M_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 0 - 6 = -6$	$C_{22} = (-1)^{2+2}(-6) = -6$
	$M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 0 - 0 = 0$	$C_{23} = (-1)^{2+3}0 = 0$
Uchunchi qator bo'yicha tekshirish:	$M_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 0 - 4 = -4$	$C_{31} = (-1)^{3+1}(-4) = 4$
	$M_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0 - 0 = 0$	$C_{32} = (-1)^{3+2}0 = 0$
	$M_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 - 0 = 0$	$C_{33} = (-1)^{3+3}0 = 0$

$$\det(C) = (5 \times 0) + (0 \times 9) + (2 \times (-6)) = -12$$

Munozara

Natijalar

shuni ko'rsatadiki, minorlar va to'ldiruvchilar determinantni hisoblashni soddalashtiradi, lekin katta matritsalar uchun hisoblash murakkab ($n!$ vaqt). Boshqa usullar, masalan Gauss eliminatsiyasi ($O(n^3)$), bilan solishtirganda, Laplace kengaytmasi ko'proq nazariy ahamiyatga ega. Cheklovlar: Yuqori tartibli matritsalar uchun vaqt va resurs talab qiladi. Biroq, sun'iy intellekt va kvant hisoblashda yangi qo'llanishlar topmoqda, masalan neural tarmoqlar gradientlari va qubit holatlarini



hisoblashda. Shores kitobida ta'kidlanganidek, minorlar eigenvalue muammolarida ham muhim.

Xulosa

Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar chiziqli algebraning asosiy vositalari bo'lib, determinant va invers matritsani hisoblashda, shuningdek chiziqli tizimlar yechimida muhim. Ushbu maqola ularning xossalarini, Laplace teoremasini batafsil isbot va misollar orqali tahlil qildi. Bu mavzu ta'limda va tadqiqotlarda katta ahamiyatga ega.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Strang, G. (2016). Linear Algebra and Its Applications. Wellesley-Cambridge Press.
2. Anton, H. (2010). Elementary Linear Algebra. Wiley.
3. Lay, D. C. (2015). Linear Algebra and Its Applications. Pearson.
4. Prasolov, V. (1994). Problems and Theorems in Linear Algebra. American Mathematical Society.
5. Treil, S. (2014). Linear Algebra Done Wrong. Brown University.
6. Pinkham, J. (2015). Linear Algebra. Columbia University Department of Mathematics.
7. Kuttler, K. (2022). A First Course in Linear Algebra. Mathematics LibreTexts.
8. Macauley, M. (2021). Lecture on Minors and Cofactors. Clemson University.
9. Linear Algebra. (2007). UC Davis Mathematics Department.
10. "The Importance of Minors." (2018). Math Stack Exchange.
11. "Part 19: Minors and Cofactors." (2019). Medium.
12. Shores, T. S. (2007). Applied Linear Algebra and Matrix Analysis. Springer.
13. The Manga Guide to Linear Algebra. (2012). No Starch Press.
14. Wikipedia. (2023). Laplace Expansion.



15. arXiv.org. Various articles on matrix minors (e.g., "Matrix Minors and Cofactors").
16. Hoffman, K., & Kunze, R. (1971). Linear Algebra. Prentice-Hall.
17. Axler, S. (2015). Linear Algebra Done Right. Springer.
18. Beezer, R. (2010). A First Course in Linear Algebra. University of Puget Sound.
19. Hefferon, J. (2020). Linear Algebra. Saint Michael's College.
20. Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2013). Matrix Computations. Johns Hopkins University Press.