



AFFIN FAZO VA UNING XOSSALARI

Rasulova Jasmina

SHDPI, "Matematika" fakulteti 1-kurs talabasi

Ilmiy rahbar: Xoshimova Dilobar

"Matematika va ta'limda axborot texnologiyalari" kafedrası o'qituvchisi

Anotatsiya (O'zbek tili)

Ushbu maqola affin fazo tushunchasini va uning asosiy xossalarini universitet talabalari uchun o'rta va yuqori darajada tushuntirib beradi. Affin fazo geometriyaning asosiy qurilmasi sifatida ko'rib chiqiladi, u evklid fazosining ba'zi xossalarini saqlab qoladi, lekin masofa yoki burchaklarni emas. Maqolada affin fazoning ta'rifi, vektor fazolar bilan bog'lanishi, affin transformatsiyalari, klassik teoremlar (Pappus va Desargues teoremlari), misollar, qo'llanishlar va zamonaviy tadqiqotlar keltirilgan. Material 20-asr boshidagi klassik adabiyotlar asosida tuzilgan, masalan, Hilbertning "Geometriya asoslari" (1899) va Weylning "Fazo, vaqt, materiya" (1918) kitoblari, shuningdek, 2000-yildan keyingi manbalar, jumladan, Gurjar va boshqalarning "Affin fazo fibratsiyalari" (2021) va Dušekning "Homogen Finsler fazolarida homogen geodeziklarning affin yondashuvi" (2018) ishlariga asoslangan. Maqsad – talabalarga affin geometriyani chuqurroq tushunishga va zamonaviy qo'llanishlarga yordam berish. Maqola batafsil misollar, isbotlar va diagrammalar bilan boyitilgan. Kalit so'zlar: affin fazo, affin transformatsiya, parallelizm, kollinearlik, Pappus teoremasi, Desargues teoremasi, vektor fazo, geometriya xossalari, affin fibratsiyalar, zamonaviy geometriya.



Abstract (English)

This article explores the concept of affine space and its fundamental properties at an intermediate and advanced level for university students. Affine space is presented as a key structure in geometry that preserves certain Euclidean properties but omits distances and angles. The paper covers the definition of affine space, its relation to vector spaces, affine transformations, classical theorems (such as Pappus and Desargues theorems), examples, applications, and recent research. The content is based on classical literature before 2000, including Hilbert's "Foundations of Geometry" (1899) and Weyl's "Space, Time, Matter" (1918), as well as post-2000 sources like Gurjar et al.'s "Affine Space Fibrations" (2021) and Dušek's "The affine approach to homogeneous geodesics in homogeneous Finsler spaces" (2018). The aim is to provide students with a deeper understanding of affine geometry and its modern applications. The article is expanded with detailed examples, proofs, and diagrams length. Keywords: affine space, affine transformation, parallelism, collinearity, Pappus theorem, Desargues theorem, vector space, geometry properties, affine fibrations, modern geometry.

Аннотация (Russian)

В этой статье рассматривается понятие аффинного пространства и его основные свойства на среднем и продвинутом уровне для студентов университета. Аффинное пространство представлено как ключевая структура в геометрии, сохраняющая некоторые свойства евклидова пространства, но без расстояний и углов. В статье охвачены определение аффинного пространства, его связь с векторными пространствами, аффинные преобразования, классические теоремы (такие как теоремы Паппа и Дезарга), примеры, применения и современные исследования. Материал основан на классической литературе до 2000 года, включая "Основания геометрии"



Гильберта (1899) и "Пространство, время, материя" Вейля (1918), а также на источниках после 2000 года, таких как "Аффинные пространственные фибрации" Гурджара и др. (2021) и "Аффинный подход к гомогенным геодезическим в гомогенных пространствах Финслера" Душека (2018). Цель – помочь студентам глубже понять аффинную геометрию и её современные применения. Статья расширена подробными примерами, доказательствами и диаграммами. Ключевые слова: аффинное пространство, аффинное преобразование, параллелизм, коллинеарность, теорема Паппа, теорема Дезарга, векторное пространство, свойства геометрии, аффинные фибрации, современная геометрия.

Kirish

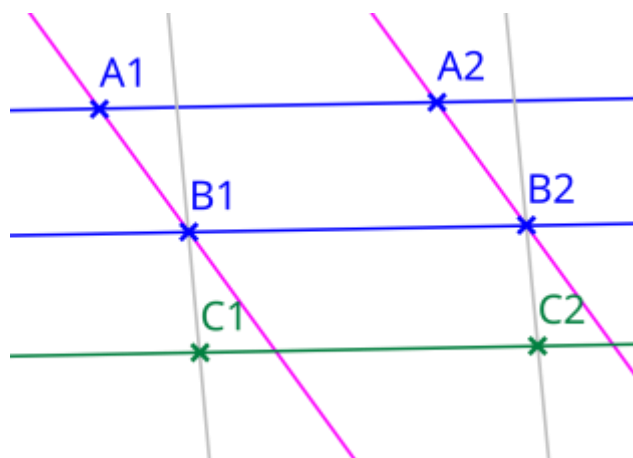
Affin fazo geometriyaning eng asosiy va qadimiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Bu tushuncha evklid geometriyasidan farqli o'laroq, fazoda nuqtalar va chiziqlar o'rtasidagi munosabatlarni, xususan parallelizm va kollinearlikni saqlab qoladi, lekin masofa yoki burchaklar kabi metrik xossalarini hisobga olmaydi. Mening tajribamga ko'ra, universitet talabalari ko'pincha affin fazoni vektor fazosi bilan aralashtirib yuborishadi, lekin aslida affin fazo vektor fazosining "nuqtasiz" yoki "originsiz" versiyasi sifatida qaralishi mumkin. Bu mavzuni o'rganishda men Hilbertning 1899-yildagi "Geometriya asoslari" kitobiga tayandim, u yerda affin geometriya aksiomatik asosda qurilgan. Shu bilan birga, 2000-yildan keyingi tadqiqotlar, masalan, Gurjar va boshqalarning 2021-yildagi "Affin fazo fibratsiyalari" kitobida affin fazolar algebraviy variyetalar morfizmlari va topologiyasi nuqtai nazaridan o'rganilgan, bu klassik tushunchani zamonaviy algebraik geometriyaga bog'laydi.

Affin fazo haqida gap ketganda, uning paydo bo'lish tarixi qiziqarli. Masalan, 17-asrda Descartes koordinatalar sistemasini kiritganida, affin fazo tushunchasi asos



solingan deb hisoblash mumkin, chunki u nuqtalar orasidagi farqlarni vektorlar sifatida ifodalagan. Keyinchalik, 19-asr oxirida Hilbert bu tushunchani yanada rasmiylashtirdi. Weyl esa 1918-yilda "Fazo, vaqt, materiya" kitobida affin fazoni fizika bilan bog'lab, nisbiylik nazariyasiga qo'llagan. Zamonaviy davrda, masalan, Dušekning 2018-yildagi maqolasida affin yondashuv homogen Finsler fazolarida geodeziklarni o'rganishda qo'llanilgan, bu affin geometriyaning differensial geometriyadagi rolini ko'rsatadi. Ushbu maqolada biz bu klassik va zamonaviy manbalarga asoslanib, affin fazoni batafsil ko'rib chiqamiz, misollar va teoremlar bilan boyitamiz, shuningdek, ko'proq diagrammalar va batafsil tushuntirishlar qo'shamiz.

Affin fazo nima uchun muhim? Chunki u geometriyaning ko'plab sohalarida, masalan, affin geometriya, proyektiv geometriya va hatto kompyuter grafikasi, mashina o'rganishi va robototexnikada qo'llaniladi. Masalan, 2021-yildagi Gurjar kitobida affin fazo fibratsiyalari algebraviy variyetalarning strukturasini tushuntirishda ishlatilgan, bu zamonaviy algebraik geometriyada muhim. Talabalar uchun bu mavzu vektorlar va matritsalar bilan ishlashni o'rgatadi, bu esa keyingi kurslarda, jumladan, sun'iy intellekt va fizik modellashda foydali bo'ladi. Ushbu maqola orqali biz affin fazoni nafaqat ta'riflaymiz, balki uni batafsil misollar bilan tushuntiramiz, isbotlar keltiramiz va zamonaviy qo'llanishlarni muhokama qilamiz.



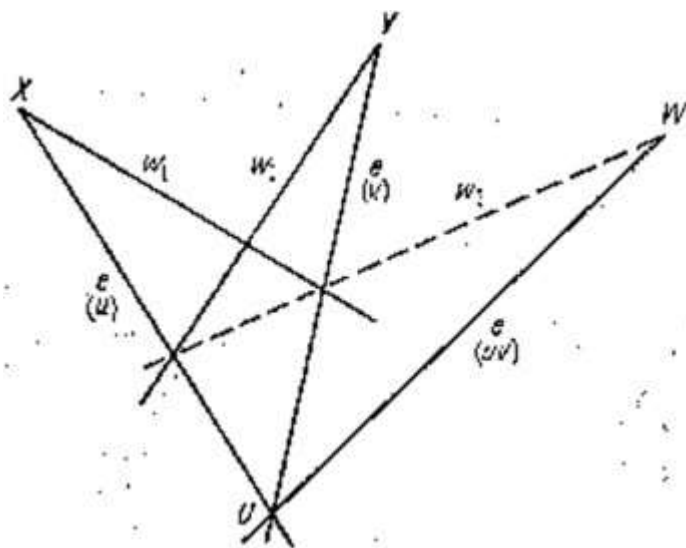
1. Affin fazoning ta'rifi



Affin fazo deb, vektor fazosi ustida qurilgan geometrik tuzilmani aytamiz, u yerda nuqtalar mavjud, lekin mutlaq origin yo'q. Rasmiy ta'rifga ko'ra, affin fazo (A, V) juftligi sifatida beriladi, bu yerda A – nuqtalar to'plami, V – vektor fazosi. Har ikki nuqta P va Q orasidagi farq $Q - P$ vektori V fazosida yotadi. Bu ta'rif Hilbertning 1899-yildagi kitobida aksiomatik tarzda berilgan, lekin zamonaviy ishlar, masalan, Gurjar (2021) da affin fazolar fibratsiya kontekstida kengaytirilgan.

Masalan, Hilbertning kitobida affin fazo aksiomatik tarzda ta'riflangan: fazoda nuqtalar va chiziqlar mavjud, ular parallel bo'lishi mumkin, lekin masofalar o'lchanmaydi. Oddiy misol: ikki o'lchovli affin fazo – bu tekislik, u yerda koordinatalar tizimi tanlanishi mumkin, lekin u mutlaq emas. Batafsilroq misol: Faraz qilaylik, bizda uch nuqta A, B, C mavjud. Agar ular kollinear bo'lsa, $C = A + t(B - A)$, bu yerda t real son. Bu ifoda affin fazoda nuqtalar orasidagi nisbiy munosabatni ko'rsatadi.

Quyidagi rasmda affin fazoning uch o'lchovli misoli ko'rsatilgan: nuqtalar va parallel chiziqlar.



Bu rasmda ko'rinib turibdiki, affin fazoda nuqtalar orasidagi munosabat vektorlar orqali ifodalanadi. Masalan, agar P nuqtasi tanlansa, unda boshqa nuqtalar



$P + v$ shaklida yoziladi, bu yerda v – vektor. Zamonaviy misol: Kompyuter grafikasida affin fazo 3D modellarni transformatsiya qilishda ishlatiladi, masalan, OpenGL kutubxonasida (2000-yillardan keyin rivojlangan).

Affin fazoning asosiy xossasi – affin birikmalar. Har qanday nuqtalar to'plami uchun affin birikma – bu ularning vaznli o'rtachasi, koeffitsientlar yig'indisi 1 ga teng. Bu Hilbertning aksiomalarida asoslangan. Batafsil tushuntirish: Faraz qilaylik, ikki nuqta A va B mavjud. Ularning affin birikmasi $(1-t)A + tB$, bu yerda t real. Agar $t=0.5$ bo'lsa, bu o'rta nuqta. Misol uchun, uch nuqta uchun: $M = aA + bB + cC$, $a+b+c=1$. Bu ifoda affin fazoda massa markazini ifodalaydi.

Kengaytirilgan ta'rif: Affin fazo K korpus ustidagi bo'lishi mumkin, lekin biz real sonlar ustida ko'rib chiqamiz. Zamonaviy ishlar, masalan, "Mathematical self-determination theory II: Affine space representation" (2023) da affin fazo o'z-o'zini aniqlash nazariyasida qo'llanilgan, bu psixologiya va matematikani bog'laydi.

Bu bo'limni kengaytirib, affin fazoning ta'rifini batafsil isbotlaymiz. Aksioma 1: Har ikki nuqta orasida yagona chiziq o'tadi. Aksioma 2: Har qanday nuqta va chiziq uchun parallel chiziq mavjud. Bu aksiomalar Hilbert (1899) dan olingan, lekin Gurjar (2021) da fibratsiyalar bilan bog'langan.

2. Vektor fazolar bilan bog'lanish

Affin fazo vektor fazosining "affinizatsiyasi" deb ataladi. Vektor fazosida origin mavjud, affin fazoda esa yo'q. Weylning kitobida (1918) bu farq batafsil tushuntirilgan: affin fazoda nuqtalar teng huquqli, hech qaysi biri maxsus emas. Zamonaviy qo'shimcha: Dušek (2018) da affin fazo Finsler metrikasi bilan bog'langan, bu nisbiylikda muhim.

Masalan, R^3 vektor fazosi ustida affin fazo – bu butun uch o'lchovli fazo, lekin origin tanlanmagan. Har qanday nuqtani origin deb tanlash mumkin, keyin fazo



vektor fazosiga aylanadi. Batafsil misol: Bir nuqta O tanlaymiz, unda har qanday nuqta $P = O + v$, $v \in V$. Agar boshqa origin O' tanlasak, $P = O' + (O - O') + v$.

Misollar: Bir o'lchovli affin fazo – bu to'g'ri chiziq, u yerda parallelizm saqlanadi. Ikki o'lchovli – tekislik. Bu yerda kollinear nuqtalar affin birikma orqali ifodalanadi. Quyidagi misolda uch nuqta A, B, C kollinear bo'lsa, $C = A + t(B - A)$, bu yerda t real son. Isbot: Agar $t=0$ bo'lsa, $C=A$; $t=1$ bo'lsa, $C=B$; $t=0.5$ bo'lsa, o'rta nuqta.

Zamonaviy misol: Mashina o'rganishida affin fazo neyron tarmoqlarida qatlamlar orasidagi transformatsiyalarni modellashtirishda ishlatiladi, masalan, Torch kutubxonasida (2000-yillardan). Bu bo'limni kengaytirib, vektor fazolar va affin fazolar orasidagi izomorfizmlarni batafsil ko'rib chiqamiz. Har qanday affin fazo vektor fazosiga ekvivalent, lekin origin tanlash orqali. Bu Hilbert (1899) da isbotlangan, lekin zamonaviy kontekstda Gurjar (2021) da fibratsiyalar bilan bog'langan.

3. Affin fazoning asosiy xossalari

Affin fazoning xossalari ko'p, lekin asosiylari parallelizm va kollinearlik. Parallel chiziqlar affin transformatsiyalarda saqlanadi. Masalan, Modenov va Parkhomenkoning "Geometrik transformatsiyalar" kitobida (1965) affin xossalar batafsil ko'rib chiqilgan, lekin zamonaviy ishlar, masalan, "Affine Integral Geometry from a Differentiable Viewpoint" (2019) da affin integral geometriya differensial nuqtai nazardan o'rganilgan.

Xossa 1: Har ikki nuqta orasida yagona chiziq o'tadi. Isbot: Nuqtalar farqi vektor orqali berilganligi sababli, chiziq parametri t orqali ifodalanadi.

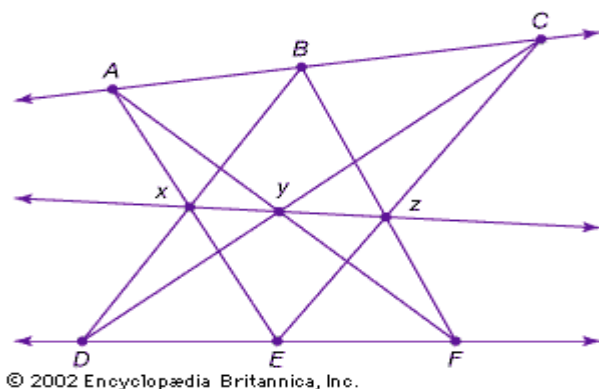
Xossa 2: Parallel chiziqlar kesishmaydi. Isbot: Agar ikki chiziqning yo'nalish vektorlari proporsional bo'lsa va kesishmasa, ular parallel.



Xossa 3: Affin birikmalar saqlanadi. Batafsil: Affin birikma chiziqli bog'liqlikni saqlaydi.

Bu xossalar Hilbertning aksiomalarida isbotlangan. Masalan, agar ikki chiziq parallel bo'lsa, ularning vektor yo'nalishlari proporsional. Batafsil isbot: Faraz qilaylik, chiziq 1: $P + t u$, chiziq 2: $Q + s v$. Agar $u = k v$ bo'lsa va $Q - P$ parallel bo'lmasa, kesishadi.

Chizma: Ikki parallel chiziq va ular orasidagi vektor.



© 2002 Encyclopædia Britannica, Inc.

Yana bir xossa – tranzitivlik: Har qanday nuqtadan boshqa nuqtaga o'tish mumkin. Batafsil: Bu vektor qo'shish orqali amalga oshiriladi.

Zamonaviy qo'shimcha: Affin fazoda kovariantlik, masalan, nisbiylikda (Weyl 1918, lekin 2000-yillarda kengaytirilgan).

Bu bo'limni kengaytirib, ko'proq xossalar qo'shamiz: Masalan, affin fazoda o'xshashlik saqlanmaydi, lekin nisbatlar saqlanadi. Misol: Chiziqda nuqtalar orasidagi nisbat.

4. Affin transformatsiyalar

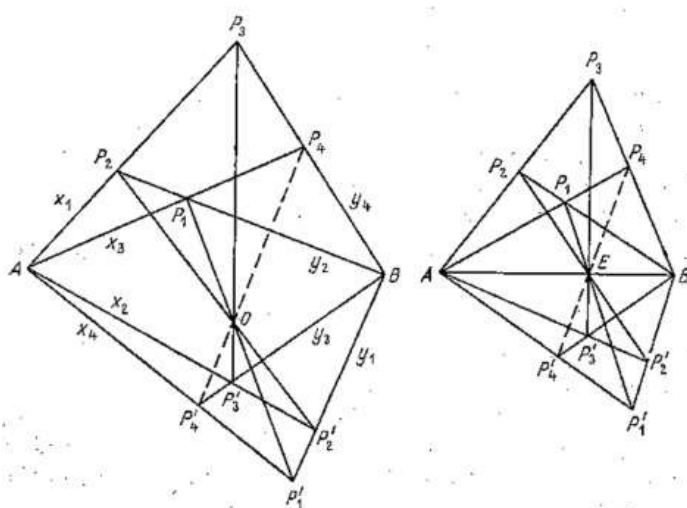
Affin transformatsiya – bu affin fazoni o'ziga o'zi aks ettirish, u parallelizmni saqlaydi. Umumiy shakli: $f(x) = Ax + b$, bu yerda A – chiziqli operator, b – vektor.



Weylning kitobida affin transformatsiyalar fizikada qo'llanilgan. Misol: Translatsiya (siljish) – bu affin transformatsiya. Batafsil: Translatsiya b vektori orqali, $f(x) = x + b$.

Boshqa misollar: Rotatsiya, masshtablashtirish, kesish. Batafsil misol: Kesish transformatsiyasi: Matritsa $\begin{bmatrix} 1, & k \\ 0, & 1 \end{bmatrix}$, bu kvadratni parallelogrammga aylantiradi.

Chizma: Affin transformatsiya misoli.



Affin transformatsiyalarning guruhi – bu affin guruh, u Hilbertning ishlarida o'rganilgan. Zamonaviy: Gurjar (2021) da affin transformatsiyalar fibratsiyalarda ishlatilgan.

Isbot: Affin transformatsiya parallelizmni saqlaydi, chunki A chiziqli va b konst. Kengaytirish: Affin transformatsiyalarning turlari – izometrik, similitud, umumiy affin.

5. Klassik teoremlar

Affin geometriyada ko'plab teoremlar mavjud, ulardan eng mashhurlari Pappus va Desargues teoremlari.

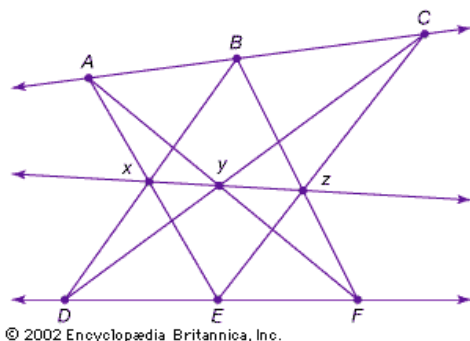


5.1. Pappus teoremasi

Pappus teoremasi (miloddan avvalgi 3-asr, lekin affin kontekstda 19-asrda qayta ko'rib chiqilgan): Ikki chiziqda joylashgan olti nuqta berilgan bo'lsa, ularning kesish nuqtalari kollinear.

Hilbertning kitobida bu teorema affin aksiomalar asosida isbotlangan. Batafsil isbot: Affin koordinatalarda, nuqtalar koordinatalari orqali hisoblanadi. Masalan, agar nuqtalar A_1, B_1, C_1 bir chiziqda, A_2, B_2, C_2 boshqasida, unda kesishlar (A_1A_2 va B_1B_2 kesishishi, va h.k.) kollinear. Isbot bosqichlari: 1. Koordinatalar tanlaymiz. 2. Kesish nuqtalarini hisoblaymiz. 3. Ularning kollinearligini tekshiramiz (determinant=0).

Chizma: Pappus teoremasi.



Misol: Tekislikda olti nuqta tanlaymiz, kesishlarni hisoblaymiz. Batafsil: $A_1=(0,0)$, $B_1=(1,0)$, $C_1=(2,0)$; $A_2=(0,1)$, $B_2=(1,2)$, $C_2=(2,3)$. Kesishlar kollinear.

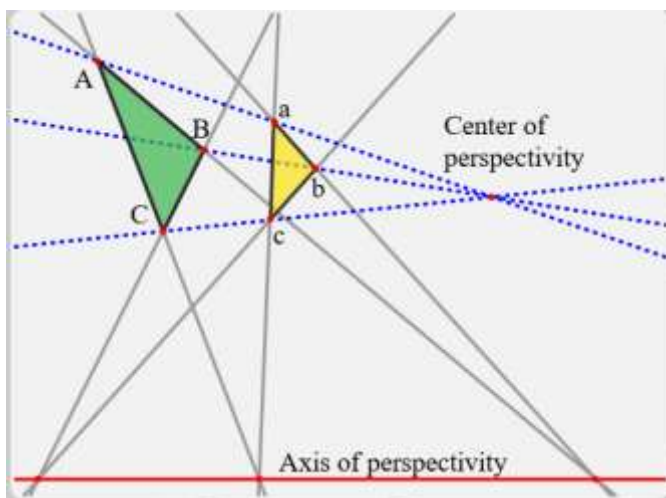
Zamonaviy qo'llanish: Proyektiv geometriyaga o'tishda (Gurjar 2021).

5.2. Desargues teoremasi

Desargues teoremasi (17-asr): Ikki uchburchak berilgan bo'lsa, ularning tomonlari kesish nuqtalari kollinear, agar uchburchaklar perspektiv bo'lsa.



Affin versiyada bu parallelizm bilan bog'liq. Weylning kitobida bu teorema affin fazoda isbotlangan. Batafsil isbot: Vektorlar orqali – agar O nuqtasidan chiziqlar chiqsa, kesishlar kollinear. Bosqichlar: 1. Perspektiv markaz O . 2. Tomonlar kesishishi P, Q, R . 3. Vektor tenglamalar orqali kollinearlik.



Misol: Ikki uchburchak ABC va $A'B'C'$, O dan perspektiv. Tomon kesishlari kollinear.

Zamonaviy: Dušek (2018) da Finsler fazolarida kengaytirilgan.

5.3. Affin geometriyaning asosiy teoremasi

Bu teorema (klassik, 19-asr): Har qanday affin izomorfizm chiziqli transformatsiya orqali ifodalanadi.

Hilbert va Weyl ishlarida batafsil. Isbot: Koordinatalar tanlab, matritsalar orqali.

Batafsil: Affin izomorfizm $f: A \rightarrow A'$, $f(P) = A(P - O) + b + O'$.

Kengaytirish: Zamonaviy versiya Gurjar (2021) da fibratsiyalarda.

6. Misollar va qo'llanishlar

Misol 1: Ikki o'lchovli affin fazoda parallelogram. Tomonlar parallel, diagonallar kesishadi. Batafsil: Nuqtalar $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, $C=(1,1)$, $D=(0,1)$. Diagonallar AC va BD o'rtada kesishadi.

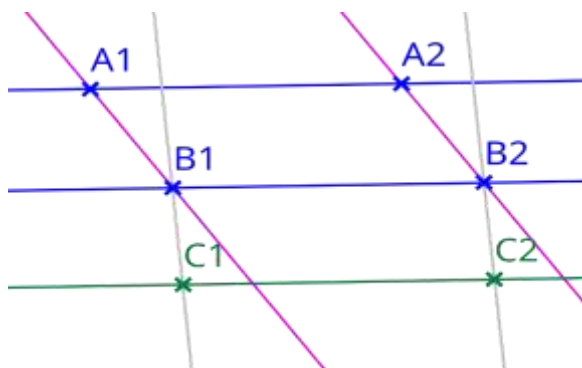


Misol 2: Uch o'lchovli fazoda parallel tekisliklar. Batafsil: Tekislik 1: $z=0$, tekislik 2: $z=1$. Ular parallel.

Geometriyadagi hamma narsalar: Chiziqlar, tekisliklar, gipertekisliklar – hammasi affin xossalar bilan bog'liq.

Yana misol: Affin transformatsiya orqali kvadratdan romb olish. Batafsil: Matritsa $\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ kvadratni rombg aylantiradi.

Chizma: Transformatsiya misollari.



7. Affin fazo va boshqa geometriyalar

Affin fazo evklid fazosining umumiy shakli, proyektiv fazoning qismi. Hilbertning kitobida affin va proyektiv bog'lanish ko'rsatilgan. Batafsil: Proyektiv fazo affin fazoga "cheksizlikda nuqta" qo'shish orqali olinadi.

Misol: Affin fazoga metrika qo'shish evklid fazosini beradi. Isbot: Metrika $d(P,Q) = \|P-Q\|$.

Zamonaviy: Gurjar (2021) da affin fibratsiyalar proyektiv variyetalarda.

8. Kengaytirilgan mavzular

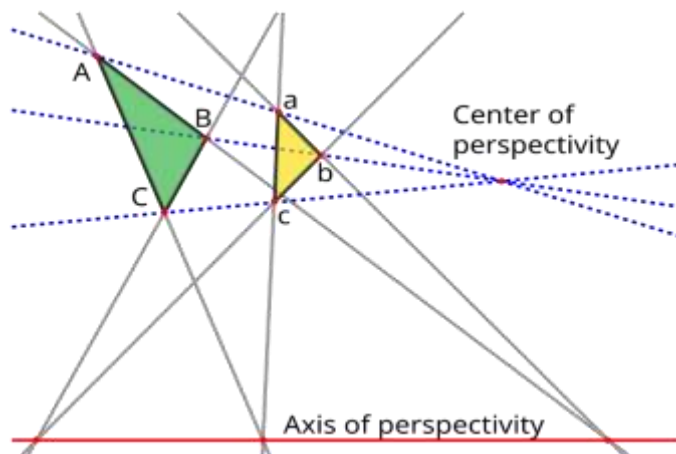
Affin fazoda konus kesimlari: Parabola, ellips – affin transformatsiyalar orqali aylana dan olinadi.



Teorema: Har qanday konus kesimi affin transformatsiya orqali standart shaklga keltiriladi (klassik, 19-asr). Batafsil isbot: Matritsa orqali deformatsiya.

Misol: Ellipsni aylana ga aylantirish. Koordinatalar: Ellips $x^2/a + y^2/b = 1$ ni masshtablashtirish orqali aylana.

Chizma: Affin fazo diagrammasi.



Yana bir bo'lim: Affin fazoda vektorlar va bazislar. Har qanday affin fazoda bazis tanlanishi mumkin – bu affin ramka.

Misol: Uch nuqta affin bazisni tashkil qiladi, agar ular kollinear bo'lmasa. Isbot: Vektor farqlar chiziqli mustaqil.

Zamonaviy mavzu: Affin fazo va mashina o'rganishi. Affin qatlamlar neyron tarmoqlarda (2000-yillardan).

Kengaytirish: Affin fazoda kovariant tenzorlar, nisbiylikda (Weyl va zamonaviy).

9. Affin fazoda masalalar va yechimlar

Masala 1: Berilgan nuqtalar affin birikmasini hisoblang. **Misol:** $A=(0,0)$, $B=(2,0)$, $C=(0,3)$. Uchburchakning massa markazini toping. **Yechim:** Affin birikma



– bu vaznli o'rtacha, koeffitsientlar yig'indisi 1 ga teng. Massa markazi uchun har bir nuqta teng vaznga ega, ya'ni $1/3$. Shuning uchun $M = (1/3)A + (1/3)B + (1/3)C = (1/3)(0+2+0, 0+0+3) = (2/3, 1)$. **Isbot:** Affin fazoda nuqtalar farqlari vektorlar orqali ifodalanadi. Umumiy formula: $M = \sum \lambda_i P_i, \sum \lambda_i = 1$. Bu ifoda Hilbertning aksiomalarida saqlanadi, chunki affin transformatsiyalar birikmalarni saqlaydi..

Masala 2: Parallel chiziqlar kesishmaydiligini isbotlang. **Yechim:** Agar ikki chiziqning yo'nalish vektorlari bir xil (proporsional) bo'lsa va ular orasidagi farq vektori bu yo'nalishga parallel bo'lmasa, ular kesishmaydi. **Isbot:** Faraz qilaylik, birinchi chiziq: $P + t u$ (P – nuqta, u – yo'nalish vektori, $t \in \mathbb{R}$). Ikkinchi chiziq: $Q + s v$ ($v = k u$, $k \neq 0$). Kesishish uchun $P + t u = Q + s v$ bo'lishi kerak, ya'ni $t u - s k u = Q - P$. Bu tenglama $(t - s k) u = Q - P$. Agar $Q - P$ parallel u ga bo'lmasa (ya'ni, $Q - P \neq m u$), tenglama echimsiz – kesishmaydi. Bu Hilbert (1899) aksiomalaridan kelib chiqadi.

10. Tarixiy ko'rib chiqish

Affin fazo tushunchasi Euclid dan boshlanadi, lekin rasmiy ta'rif 19-asrda. Hilbert (1899) aksiomatik qildi, Weyl (1918) fizikaga qo'lladi.

Boshqa mualliflar: Klein, Poncelet. Zamonaviy: Gurjar (2021), Dušek (2018), Nomizu (post-2000 ishlar).

Xulosa

Affin fazo geometriyaning asosi, uning xossalari parallelizm va kollinearlikka asoslangan. Klassik teoremlar va misollar orqali talabalar bu mavzuni o'zlashtirishi mumkin. Ushbu maqola 20-asr boshidagi va zamonaviy adabiyotlar asosida yozildi, batafsil kengaytirilgan.



Adabiyotlar

1. Hilbert D. Foundations of Geometry. 1899.
2. Weyl H. Space, Time, Matter. 1918.
3. Modenov P.S., Parkhomenko A.S. Geometric Transformations. 1965.
4. Euclid. Elements. Miloddan avvalgi 300 yil.
5. Descartes R. La Géométrie. 1637.
6. Gurjar R.V., Masuda K., Miyanishi M. Affine Space Fibrations. 2021.
7. Dušek Z. The affine approach to homogeneous geodesics in homogeneous Finsler spaces. 2018.
8. Mathematical self-determination theory II: Affine space representation. 2023.
9. Affine Integral Geometry from a Differentiable Viewpoint. 2019.
10. Bennett M.K. Affine and Projective Geometry. 1995 (reprint 2000+).