КЛАСС ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ГЕЛЬДЕРА.

Ўразалиев Ширинбой Бўрон ўғли

СамИСИ, Олий математика кафедраси ассистенти

shirinboy.urazaliyev@mail.ru

Аннотация: $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ относится к удовлетворению условия Гельдера в комплексной плоскости с несколькими переменными.

Ключевые слова: Условие Гельдера, Многомерный комплексный анализ, Класс функций Гельдера, Показатель Гельдера, Инвариантные числа, Неравенство Гельдера, Функции многих комплексных переменных.

Annotation: $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ is about the satisfaction of the Golder condition in the multivariable complex plane.

Keywords: Hölder condition, Multivariate complex analysis, Hölder function class, Hölder exponent, Invariant numbers, Hölder inequality, Functions of several complex variables.

Пусть функция φ (t) определена в Δ-остов.

Определение 1. Если $\varphi(t) = \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ функция $\varphi(t) = \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ для точек

$$|\varphi(t) - \varphi(\tau)| \le \sum_{k=1}^{n} A_k \, |t_k - \tau_k|^{\alpha_k} \qquad (1)$$

если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет неравенству, то говорят, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию гульдена В Δ, где $A_k \ (k = \overline{1,n})$ положительные числа являются переменной Гельдера, α_k, $0 < \alpha_k \le 1 \ (k = \overline{1,n})$ -

инвариантные числа, удовлетворяющие неравенству, которое называется показателем Гельдера.

Определим класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера, как $H_{\alpha_k}(\Delta)$.

Если $\varphi(t) \in H_{\alpha_k}(\Delta)$, то $\varphi(t) \in H_{\beta_k}(\Delta)$ $(\beta_k < \alpha_k,\ k = \overline{1,n})$. Действительно, по условию $\varphi(t) \in H_{\alpha_k}(\Delta)$;

$$|\varphi(t) - \varphi(\tau)| \leq \sum_{k=1}^{n} A_k\, |t_k - \tau_k|^{\alpha_k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_k\, |t_k - \tau_k|^{\alpha_k} = \sum_{k=1}^{n} A_k\, |t_k - \tau_k|^{\alpha_k - \beta_k} \cdot |t_k - \tau_k|^{\beta_k} \leq$$

$\leq \sum_{k=1}^{n} \check{A}_k\, |t_k - \tau_k|^{\beta_k} \quad \Rightarrow \ \varphi(t) \in H_{\beta_k}(\Delta)$ из этого следует, что.

1-теорема. функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гельдера (1) в Δ другой для каждого аргумента t_p для t_k $(p \neq k, k = \overline{1,n})$ относительно аргументов плоский необходимо и достаточно, чтобы удовлетворить условию Гельдера.

Доказательство. Действительно, $\tau_k = t_k$, $k = \overline{1,n}, p \neq k$, когда

$$\left|\varphi(t) - \varphi(t_{\tau_p})\right| \leq A_p \left|t_p - \tau_p\right|^{\alpha_p}, \quad p = \overline{1,n} \qquad (2)$$

будет уместно. Точно так же нетрудно доказать следующие неравенства:

$$\begin{cases} \left|\varphi\left(t_{\tau_p}\right) - \varphi(t_{\tau_{pq}})\right| \leq A_q \left|t_q - \tau_q\right|^{\alpha_q}, \quad p,q = \overline{1,n}, p < q \\ \left|\varphi\left(t_{\tau_{pq}}\right) - \varphi(t_{\tau_{pqr}})\right| \leq A_r |t_r - \tau_r|^{\alpha_r}, \quad p,q,r = \overline{1,n}, p < q < r \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left|\varphi\left(\tau_{t_p}\right) - \varphi(\tau_{t_{pq}})\right| \leq A_q \left|t_q - \tau_q\right|^{\alpha_q}, \quad p,q = \overline{1,n}, p < q \\ \left|\varphi(\tau) - \varphi(\tau_{t_p})\right| \leq A_p \left|t_p - \tau_p\right|^{\alpha_p}, \quad p = \overline{1,n} \end{cases} \qquad (3)$$

(3) принимая во внимание систему неравенств

$$|\varphi(t)-\varphi(\tau)| \le \left|\varphi(t)-\varphi\left(t_{\tau_1}\right)\right| + \left|\varphi\left(t_{\tau_1}\right)-\varphi\left(t_{\tau_{12}}\right)\right| + \cdots +$$

$$+\left|\varphi\left(\tau_{t_{n-1},n}\right)-\varphi\left(\tau_{t_n}\right)\right| + \left|\varphi\left(\tau_{t_n}\right)-\varphi(\tau)\right|,$$

из неравенства следует утверждение теоремы.

Некоторые суммы используются позже.

$$\varphi_n(\tau;t)=\varphi_n(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n;t_1,t_2,\dots,t_n)$$

через определим следующую сумму

$$\varphi_n(\tau;t)=\varphi(\tau)-\sum_{p=1}^{n}\varphi\left(\tau_{t_p}\right)+\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\varphi\left(\tau_{t_{pq}}\right)-\cdots+$$

$$+(-1)^{n-2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\varphi\left(t_{\tau_{pq}}\right)+(-1)^{n-1}\sum_{p=1}^{n}\varphi\left(t_{\tau_p}\right)+(-1)^n\varphi(t)\,,p<q \qquad (4)$$

из этого

$$\varphi_n(\tau;t)=(-1)^n\varphi_n(t;\tau) \qquad (5)$$

проверить правильность равенства несложно. Сумма $\varphi_n(\tau;t)$ имеет 2^n слагаемых.

Например, когда n=3

$$\varphi_3(\tau;t)=\varphi(\tau_1,\tau_2,\tau_3)-\varphi(\tau_1,\tau_2,t_3)-\varphi(\tau_1,t_2,\tau_3)-\varphi(t_1,\tau_2,\tau_3)+$$

$$+\varphi(\tau_1,t_2,t_3)+\varphi(t_1,\tau_2,t_3)+\varphi(t_1,t_2,\tau_3)-\varphi(t_1,t_2,t_3) \qquad (6)$$

$$\varphi_n\left(\tau_{t_p};t\right)=\varphi_n(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_{p-1},t_p,\tau_{p+1},\dots,\tau_n;t_1,t_2,\dots,t_n)$$

через этот

$$\varphi_n\left(\tau_{t_p};t\right)=\varphi\left(\tau_{t_p}\right)-\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{n}\varphi\left(\tau_{t_{pq}}\right)+\sum_{\substack{q=1\\q,r\neq p}}^{n}\sum_{\substack{r=1\\q<r}}^{n}\varphi\left(\tau_{t_{pqr}}\right)-\cdots+$$

$$+(-1)^{n-3}\sum_{\substack{q=1\\q,r\neq p}}^{n}\sum_{\substack{r=1\\q<r}}^{n}\varphi\left(t_{\tau_{qr}}\right)+(-1)^{n-2}\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{n}\varphi\left(t_{\tau_q}\right)+(-1)^{n+1}\varphi(t) \qquad 7)$$

Сумма (7) имеет 2^{n-1}слагаемых и строится аналогично (6), но на один слагаемый меньше.

когда $n=3$, представление (7) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases}\varphi_3\left(\tau_{t_3};t\right)=\varphi_3\left(t_{\tau_{12}};t\right)=\varphi(\tau_1,\tau_2,t_3)-\varphi(\tau_1,t_2,t_3)-\varphi(t_1,\tau_2,\tau_3)+\varphi(\tau_1,\tau_2,t_3)\\ \varphi_3\left(\tau_{t_2};t\right)=\varphi_3\left(t_{\tau_{13}};t\right)=\varphi(\tau_1,t_2,\tau_3)-\varphi(\tau_1,t_2,t_3)-\varphi(t_1,t_2,\tau_3)+\varphi(t_1,t_2,t_3)\\ \varphi_3\left(\tau_{t_1};t\right)=\varphi_3\left(t_{\tau_{23}};t\right)=\varphi(t_1,\tau_2,\tau_3)-\varphi(t_1,t_2,\tau_3)-\varphi(t_1,\tau_2,t_3)+\varphi(t_1,t_2,t_3)\end{cases} \quad (8)$$

Аналогично $\varphi_n\left(\tau_{t_{pq}};t\right)$, $\varphi_n\left(\tau_{t_{pqr}};t\right),\ldots,\varphi_n\left(t_{\tau_{pq}};t\right)$и $\varphi_n\left(t_{\tau_p};t\right)$ и т. д. Также строятся для сумм.

когда $n=3$, видимость этих сумм будет:

$$\begin{cases}\varphi_3\left(\tau_{t_{12}};t\right)=\varphi_3\left(t_{\tau_3};t\right)=\varphi(t_1,t_2,\tau_3)-\varphi(t_1,t_2,t_3)\\ \varphi_3\left(\tau_{t_{13}};t\right)=\varphi_3\left(t_{\tau_2};t\right)=\varphi(t_1,\tau_2,t_3)-\varphi(t_1,t_2,t_3)\\ \varphi_3\left(\tau_{t_{23}};t\right)=\varphi_3\left(t_{\tau_1};t\right)=\varphi(\tau_1,t_2,t_3)-\varphi(t_1,t_2,t_3)\end{cases} \qquad (9)$$

(6), в результате сложения двух вышеупомянутых систем и $\varphi(t_1,t_2,t_3)$ это

$$\varphi(\tau_1,\tau_2,\tau_3)=\varphi_3(\tau;t)+\varphi_3\left(\tau_{t_1};t\right)+\varphi_3\left(\tau_{t_2};t\right)+\varphi_3\left(\tau_{t_3};t\right)++\varphi_3\left(t_{\tau_1};t\right)+$$

$$+\varphi_3\left(t_{\tau_2};t\right)+\varphi_3\left(t_{\tau_3};t\right)+\varphi(t_1,t_2,t_3) \qquad (10)$$

формируем цикл. В общем случае внешний вид этого зеркала будет следующим.

$$\varphi(\tau)=\varphi_n(\tau;t)+\sum_{p=1}^{n}\varphi_n(\tau_{t_p};t)+\sum_{\substack{p=1\\p<q}}^{n}\sum_{q=1}^{n}\varphi_n\left(\tau_{t_{pq}};t\right)+\cdots+$$

$$+\sum_{\substack{p=1\\p<q}}^{n}\sum_{q=1}^{n}\varphi_n\left(t_{\tau_{pq}};t\right)+\sum_{p=1}^{n}\varphi_n(t_{\tau_p};t)+\varphi(t) \qquad (11)$$

проверить правильность этого утверждения не так сложно, как указано выше.

Разделим члены рассматриваемой суммы (4) на две такие группы, чтобы каждая группа была описана в виде вычитания функций, отличающихся только одним конкретным аргументом. В сумме (4) число таких групп равно 2^{n-1}. С другой стороны, количество группировок будет точно равно n.

Например, для суммы (4), Когда $n=3$:

$$\begin{cases}\varphi_3(\tau;t)=[\varphi(\tau_1,\tau_2,\tau_3)-\varphi(\tau_1,\tau_2,t_3)]+[\varphi(\tau_1,t_2,t_3)-\varphi(\tau_1,t_2,\tau_3)]\\ \quad+[\varphi(t_1,\tau_2,t_3)-\varphi(t_1,\tau_2,\tau_3)]+[\varphi(t_1,t_2,\tau_3)-\varphi(t_1,t_2,t_3)],\\ \varphi_3(\tau;t)=[\varphi(\tau_1,\tau_2,\tau_3)-\varphi(\tau_1,t_2,\tau_3)]+[\varphi(\tau_1,t_2,t_3)-\varphi(\tau_1,\tau_2,t_3)]\\ \quad+[\varphi(t_1,\tau_2,t_3)-\varphi(t_1,t_2,t_3)]+[\varphi(t_1,t_2,\tau_3)-\varphi(t_1,\tau_2,\tau_3)],\\ \varphi_3(\tau;t)=[\varphi(\tau_1,\tau_2,\tau_3)-\varphi(t_1,\tau_2,\tau_3)]+[\varphi(\tau_1,t_2,t_3)-\varphi(t_1,t_2,t_3)]\\ \quad+[\varphi(t_1,\tau_2,t_3)-\varphi(\tau_1,\tau_2,t_3)]+[\varphi(t_1,t_2,\tau_3)-\varphi(\tau_1,t_2,\tau_3)].\end{cases}$$

Аналогичные соображения можно применить к суммам $\varphi_n\left(\tau_{t_p};t\right)$, $\varphi_n\left(\tau_{t_{pq}};t\right),\ldots,\varphi_n\left(t_{\tau_{pq}};t\right)$и $\varphi_n\left(t_{\tau_p};t\right)$.

В этом пункте мы оцениваем суммы, рассмотренные в (4); для этого мы сначала посмотрим на $n=3$. Из приведенной выше системы мы находим из (4), что модуль суммы меньше или равен сумме модулей:

$$|\varphi_3(\tau;t)| \le 4A_k|\tau_k - t_k|^{\alpha_k}, \quad k=1,2,3.$$

С бозонностью видно, что в общем случае:

$$\begin{cases} |\varphi_n(\tau;t)| \le 2^{n-1}A_k|\tau_k - t_k|^{\alpha_k}, \quad k=\overline{1,n} \\ \left|\varphi_n\left(\tau_{t_p};t\right)\right| \le 2^{n-2}A_k|\tau_k - t_k|^{\alpha_k}, \quad k\ne p;\ k,p=\overline{1,n} \\ \left|\varphi_n\left(\tau_{t_{pq}};t\right)\right| \le 2^{n-3}A_k|\tau_k - t_k|^{\alpha_k}, \quad k\ne p,q;\ p<q;\quad k,p,q=\overline{1,n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \left|\varphi_n\left(t_{\tau_{pqr}};t\right)\right| \le 2^{2}A_k|\tau_k - t_k|^{\alpha_k}, \quad p<q<r;\ k\ne p,q,r;\quad k,p,q,r=\overline{1,n} \\ \left|\varphi_n\left(t_{\tau_{pq}};t\right)\right| \le 2A_k|\tau_k - t_k|^{\alpha_k}, \quad k\ne p,q;\ p<q;\quad k,p,q=\overline{1,n} \end{cases} \tag{12}$$

это то, что мы находим, используя первый:

$$|\varphi_n(\tau;t)| \le \left[|\varphi_n(\tau;t)|^n\right]^{\frac{1}{n}} \le \left[\prod_{k=1}^{n} 2^{n-1}A_k\,|\tau_k - t_k|^{\alpha_k}\right]^{\frac{1}{n}} =$$

$$= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n} A_k^{\frac{1}{n}}|\tau_k - t_k|^{\frac{\alpha_k}{n}}$$

После аналогичных рассуждений можно получить следующие неравенства для остальных неравенств вышеуказанной системы:

$$\left|\varphi_n\left(t_{\tau_{pq}};t\right)\right| \le 2\sqrt{A_p\cdot A_q}\,|\tau_p - t_p|^{\frac{\alpha_p}{2}}\cdot|\tau_q - t_q|^{\frac{\alpha_q}{2}};$$

$$p,q=\overline{1,n};\ p<q, \tag{13}$$

$$\left|\varphi_n\left(t_{\tau_{pqr}};t\right)\right| \leq 4\sqrt[3]{A_p \cdot A_q \cdot A_r}\,\left|\tau_p - t_p\right|^{\frac{\alpha_p}{3}} \cdot \left|\tau_q - t_q\right|^{\frac{\alpha_q}{3}} \cdot \left|\tau_r - t_r\right|^{\frac{\alpha_r}{3}};$$

$$p < q < r;\;\; p,q,r = \overline{1,n}; \qquad (14)$$

… … ... … … … … … … … … … … … …

$$\left|\varphi_n\left(\tau_{t_{pq}};t\right)\right| \leq 2^{n-3}\prod_{k=1}^{n} A_k^{\frac{1}{n-2}}\left|\tau_p - t_p\right|^{\frac{\alpha_k}{n-2}};$$

$$p,q = \overline{1,n};\quad p < q \quad k \neq p,q \qquad (15)$$

$$\left|\varphi_n\left(\tau_{t_p};t\right)\right| \leq 2^{n-2}\prod_{k=1}^{n} A_k^{\frac{1}{n-1}}\left|\tau_k - t_k\right|^{\frac{\alpha_k}{n-1}};\quad p = \overline{1,n};\quad k \neq p, \qquad (16)$$

$$\left|\varphi_n(\tau;t)\right| \leq 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n} A_k^{\frac{1}{n}}\left|\tau_k - t_k\right|^{\frac{\alpha_k}{n}}; \qquad (17)$$

Запишем первое из (3) через сумму $\varphi_n\left(\tau_{t_p};t\right)$ следующим образом:

$$\left|\varphi_n\left(t_{\tau_p},t\right)\right| \leq A_p\left|\tau_p - t_p\right|^{\alpha_p},\;\; p = \overline{1,n} \qquad (18)$$

заметим, что для случаев $n = 2, 3$ мы получаем оценки для тех же сумм:

$$\left|\varphi_2\left(t_{\tau_p},t\right)\right| \leq A_p\left|\tau_p - t_p\right|^{\alpha_p},\;\; p = \overline{1,2} \qquad (19)$$

$$\left|\varphi_2(\tau;t)\right| \leq 2\sqrt{A_1 \cdot A_2}\,\left|\tau_1 - t_1\right|^{\frac{\alpha_1}{2}} \cdot \left|\tau_2 - t_2\right|^{\frac{\alpha_2}{2}}, \qquad (20)$$

$$\left|\varphi_3\left(t_{\tau_p},t\right)\right| \leq A_p\left|\tau_p - t_p\right|^{\alpha_p},\;\; p = \overline{1,3} \qquad (21)$$

$$\left|\varphi_3\left(t_{\tau_p};t\right)\right| \leq 2\prod_{k=1}^{3} A_k^{\frac{1}{2}}\left|\tau_k - t_k\right|^{\frac{\alpha_k}{2}};\quad p = \overline{1,3};\quad k \neq p, \qquad (22)$$

$$|\varphi_3(\tau;t)| \leq 4\prod_{k=1}^{3} A_k^{\frac{1}{3}} |\tau_k - t_k|^{\frac{\alpha_k}{3}}; \tag{23}$$

Использованная литература.

1. В. А. Какичев. «Граничные свойства интеграла типа Коши многих переменных». Уч. зап. Шахт. пед. ин-та. 2,вып. 6,1959-г,25-90 с.

2. А. Ғозиев. Р. Мардиев «Аналитик функциянинг чегаравий масалалари ва сингулияр интеграл тенгламалар». Самарқанд-2014.

3. Н. И. Мусхелишвили. «Сингулярные интегральные уравнения». Москва. Наука. 1968-г.

4. С. Г. Михлин «Сингулярные интегральные уравнения» Усп.мат. наук. вып.3, т. 3. 1948-г.

5. Ўразалиев. Ш.Б. «Кўп комплекс ўзгарувчили Коши типидаги интегралнинг мавжудлик шарти ». ГОСПОДАРКА И ИННОWАСЖЕ. Волуме 34 (2023).

6. Rajaboyev , S., & Xamidova , P. (2025). RAQAMLI IQTISODIYOT SHAROITIDA AXBOROT KOMMUNIKATSIYA XIZMATLARIDAN FOYDALANISH. *Iqtisodiy taraqqiyot va tahlil*, *3*(1), 120–124. https://doi.org/10.60078/2992-877X-2025-vol3-iss1-pp120-124

7. Ражабоев Ш.Ш., and Амиртошев Д.Ш.. "РАҚАМЛИ ИҚТИСОДИЁТ ВА БАНК ХИЗМАТЛАРИДА БЛОКЧАЙН ТЕХНОЛОГИЯСИНИ ҚЎЛЛАШ" Экономика и социум, no. 4-2 (119), 2024, pp. 853-858.

8. Ражабоев Ш.Ш., and Ҳайитмуродов Ш.О.. "ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЯ ТИЗИМЛАРИНИНГ ТУЗИЛИШ ТАМОЙИЛЛАРИ" Экономика и социум, no. 4-2 (119), 2024, pp. 848-852.

9. Rajaboyev Sh.Sh., and Mamadaminov F.F.. "OLIY TA'LIM MUASSASASI KADRLARINI BOSHQARISH TIZIMI" Экономика и социум, no. 4-2 (119), 2024, pp. 403-406.

10. Rajaboyev Sh.Sh., and Jumayev L.G'.. "TA'LIM SOHASIDA MA'LUMOTLAR BAZASINI QO'LLANISHI" Экономика и социум, no. 4-2 (119), 2024, pp. 407-411.

11. Farxodovich, Boronov Bobur, and Rajaboyev Shahboz Shodi o'g'li. "MECHANISMS FOR USING INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGY SERVICES IN THE ELECTRONIC GOVERNMENT SYSTEM OF UZBEKISTAN AND THEIR EFFECTIVENESS." *Лучшие интеллектуальные исследования* 59.2 (2025): 285-292.

12. Farxodovich, Boronov Bobur. "STAGES OF DEVELOPMENT OF THE INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGY SERVICES SYSTEM." *Лучшие интеллектуальные исследования* 59.2 (2025): 293-298.

13. Farxodovich, Boronov Bobur, Xudaynazarova Dilnoza Gafurovna, and Yodgorov Xushvaqt Mansurovich. "FARMASEVTIKA KORXONALARIDA BUXGALTERIYA HISOBINING O 'ZIGA XOS XUSUSIYATLARI." *FRONTIERS OF KNOWLEDGE AND INTERDISCIPLINARY DISCOVERY* 1.1 (2025): 282-289.

14. Боронов, Бобур, and Заррух Мухаммадиев. "ПУТИ РАСШИРЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННОГО ОБЪЕМА УЧЕТА КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ В ХОЗЯЙСТВУЮЩИЕ СУБЪЕКТЫ." *Передовая экономика и педагогические технологии* 2.2 (2025): 444-450.