



QISQARTIRIB AKS ETTIRISH PRINTSIPINI TADBIQLARI.

Axborot texnologiyalari va menejment universiteti 2-kurs magistranti

Qayumova Barno Abdishukurovna

Axborot texnologiyalari va menejment universiteti dotsenti,

Qayumova Gavhar Abdushukurovna

Annotatsiya. Mazkur maqolada metrik fazolar va chiziqli normallashtgan fazolar nazariyasining asosiy tushunchalari hamda ularning funksional analizdagi ahamiyati yoritilgan. Xususan, to'plamning o'ziga Dekart ko'paytmasida aniqlangan va metrika aksiomalarini qanoatlantiruvchi funksiyalar asosida metrik fazo tushunchasi kiritilib, tabiiy va tekis yaqinlashish metrikalariga oid muhim misollar ko'rib chiqilgan. Shuningdek, chiziqli normallashtgan fazolarning metrik fazo sifatidagi xossalari, fundamental ketma-ketliklar va to'la metrik fazolar tushunchasi bayon etilib, Banach fazolariga doir klassik misollar keltirilgan. Maqolada qisqartirib aks ettirish (siqiluvchi akslantirish) tushunchasi aniqlanib, to'la metrik fazoda aniqlangan har qanday qisqartirib aks ettirish yagona qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lishi haqidagi asosiy teorema isboti bilan birga berilgan. Natijalarni mustahkamlash maqsadida turli metrik fazolarda siqiluvchi va siquvchi bo'lmagan akslantirishlarga oid misollar hamda funksional tenglamalarning yagona yechimga ega bo'lish shartlari tahlil qilingan. Ushbu maqola metrik fazolar va Banach fazolar nazariyasini o'rganishda nazariy va amaliy ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar. Qisqartirib aks ettirish printsiplari, matematik, metrika, yaqinlashish metrikasi, abstrakt fikrlash, qo'zg'almas, simmetriklik aksiomasi.



I. X to'planning o'zini o'ziga to'g'ri (dekart) ko'paytmasi $[X, X]$ ni $[0, \infty) = R_+$ aks ettiruvchi $\rho(x, y)$ funksiya mavjud bo'lib u quyidagi shartlarni bajarsa X to'plam metrik fazo tashkil etadi deyiladi.

1°. $\rho(x, y) \geq 0$ va $\rho(x, y) = 0 \rightarrow x = y$.

2°. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ simmetriklik aksiomasi.

3°. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ uchburchak aksiomasi.

$\rho(x, y)$ funksiyaning esa metrika deyiladi.

Misol.1. $R^n = \{x / x = (a_1, a_2, \dots, a_n)\}$ to'plamda ikki vektorlar uchun masofa $\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ tabiiy metrika R^n metrika tashkil etadi. Bu Evklid fazosidir.

Misol.2. R tabiiy metrika $\rho(x, y) = |x - y|$ bilan metrik fazo tashkil qiladi.

Misol.3. $X = [a, b]$ segmentda aniqlangan barcha uzliksiz funksiyalar to'plami $C_{[a, b]}$ metrikasi.

$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$, $x(t), y(t) \in X$ tekis yaqinlashish metrikasi.

II. V – chiziqli fazo $\rho: V \rightarrow R$, $\rho(x) = \|x\|$, $x \in V$ quyidagi aksiomalarni bajarsa (chiziqli normallashtirilgan fazo bo'ladi).

1. $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$, $x = 0$, $\|x\| = 0$.

2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in R$, $x \in V$.

3. $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.



V – chiziqli normallangan fazo bo‘lib metrik fazo hamdir.
 $\rho(x, y) = \|x - y\|, x, y \in V$.

III. X metrik fazoda $\{x_n\}$ ketma ketlik berilgan.

Agar $\rho(x_n, x_m) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m \rightarrow \infty} 0$ bo‘lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik fundamental ketma-ketlik deyiladi.

X metrik fazoda ixtiyoriy fundamental $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa X metrik fazo to‘la metrik fazo deyiladi.

V – chiziqli fazo to‘la metrik fazo V – Banax – B fazosi ham deyiladi.

Misol.4. Evklid fazosi R^n ga Banax fazosi normasi:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Shu norma bilan (*) bajariladi.

$R, R^n, C_{[a,b]}, [0,1]$ to‘la metrik fazo. Q – tabiiy metrika bilan to‘la emas chunki $\{r_n\} \in Q$ ketma – ketlik $\{r_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$ ratsional songa yaqinlashmaydi.

$X = [0,1]$ – tabiiy metrika bilan $\{x_n\} \in [0,1]$ va fundamental $\rho(x_n, x_m) = |x_n - x_m| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \exists x_n \in [0,1] \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad 0 \leq x_n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a \leq 1$ oraliq o‘zgaruvchini limitiga ko‘ra bo‘ladi. Demak, $[0,1]$ dagi fundamental ketma-ketliklar fazosi to‘la ekan.

Misol.5. $R^3 = \{X = (x, y, z), x \in R, y \in R, z \in R\}$. To‘plam quyidagi norma bilan Banax fazosi. $\|x\| = \max(|x|, |y|, |z|)$.



I. $T: X \rightarrow X$ akslantirish bo'lsin X metrik fazodan olingan $\forall x, y$ elementlar uchun $\rho(T_x, T_y) \leq \alpha \rho(x, y)$ yoki norma bo'yicha $0 < \alpha < 1$.

$$\|T_x - T_y\| \leq \alpha \|x - y\|$$

Tengsizlikni qanoatlantiradigan $\alpha (0 < \alpha < 1)$ soni mavjud bo'lsa, u holda T ni qisqartirib akslantirish deyiladi.

Teorema. To'la metrik X fazoda aniqlangan har qanday qisqartirib aks ettirish birgina qo'zg'almas nuqtaga ega, ya'ni $Tx = x$ tenglamaning birgina yechimi mavjuddir.

Isbot. $x_0 \in X$ tayinlaymiz. $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$ ketma-ketlik tuzamiz. $\rho(x_n, x_m)_{n, m \rightarrow \infty} \rightarrow 0, m > n$.

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &= \rho(T^n x_0, T^m x_0) = \rho(T^n x_0, T^m x_{m-n}) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leq \\ &\leq \alpha^n [\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})] = \alpha^n \rho(x_0, x_1) [1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-n-1}] \leq \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_0, x_1)_{n \rightarrow \infty, \alpha < 1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

X to'la metrik fazo $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$ bo'lib T – uzluksiz aks ettirish uchun.

$T_x = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x$, Demak x qo'zg'almas nuqta. Teskaridan faraz qilaylik.

$$T_x = x, T_y = y$$

$\rho(x, y) = \rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y)$ bunda teorema sharti buziladi.

$$\rho(x, y) = 0, \rightarrow x = y. (1 - \alpha) \rho(x, y) \leq 0. 0 < \alpha < 1.$$

Misol.6. $x = x^2$ yoki $Tx = x^2$ da $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1], (0, 1) \in [0, 1]$ qaraylik T akslantirish $[0, 1]$ ni o'ziga akslantirsin. Tabiiy metrika $\rho(x, y) = x - y$.



$$\rho(Tx, Ty) = |x^2 - y^2| \leq |x + y||x - y| \leq 2|x - y| = 2\rho(x, y), \quad \alpha = 2, \quad \lim_{(x,y) \in [0,1]} |x - 2 + y|$$

siqovchi emas .

Misol.7. $x = \frac{1}{10}x^3$ yoki $Tx = \frac{1}{10}x^3, = [0,1] T: X \rightarrow X$ tabiiy metrika bilan.

$$\rho(Tx, Ty) = \frac{1}{10}|x^3 - y^3| \leq \frac{1}{10}|x^2 + xy + y^2||x - y| \leq \frac{3}{10}\rho(x, y), \quad \lim_{(x,y) \in [0,1]} |x^2 + xy + y^2| = 3, \quad \alpha = \frac{3}{10}$$

siqovchi ekan. T akslantirish .

Misol.7. $(Tx)(t) = \frac{1}{5} \int_0^t (x^2(\varphi) + 1) d\varphi, (Tx)(t) \in C[0,1].$ X to'plam $[0,1]$ da uzluksiz

va t bo'yicha $|x(t)| \leq r$ shartni bajaruvchi funksiyalar to'plami.

$X = C[0,1] \cap Q_r,$ $x \in X \rightarrow Tx \in X$ uchun $|(Tx)(t)| \leq r$ ya'ni

$$\frac{1}{5}(r^2 + 1) \leq r \rightarrow r^2 - 5r + 1 = 0, \quad r_1 = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}, \quad r_2 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}, \quad r_1 \leq r \leq r_2 \quad \text{bo'lganda} \quad T: X \rightarrow X$$

bajaradi. $\rho(Tx, Ty) = \max_t |(Tx)(+) - (Ty)(+)| \leq \max_t \frac{1}{5} \int_0^t |x^2(\varphi) - y^2(\varphi)| d\varphi \leq$

$$\leq \frac{1}{5}\rho(x, y) \max_t \int_0^t |x(\varphi) + y(\varphi)| d\varphi \leq \frac{2r}{5}\rho(x, y) \quad \text{Demak,} \quad \alpha = \frac{2r}{5} \leq 1 \quad \text{bo'lishi uchun}$$

$r < \frac{5}{2},$ T siqiluvchi va $T: x \rightarrow x$ uchun $(r_1 \leq r \leq r_2) \cap \left(r < \frac{5}{2}\right) = \left\{\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{2}\right\}$ bo'ladi.

$$x(t) = \frac{1}{5} \int_0^t (x^2(\varphi) + 1) d\varphi$$

Tenglama X da $\left\{\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{2}\right\}$ bo'lganda yagona yechimga ega.

Maqolada metrik fazolar va chiziqli normallashtirilgan fazolar nazariyasining asosiy tushunchalari tizimli ravishda bayon etildi. Metrika aksiomalariga asoslangan



fazolar, fundamental ketma-ketliklar va to'la metrik fazolar tushunchasi tahlil qilinib, Banax fazolarining muhim xossalari yoritildi. Qisqartirib aks ettirish tushunchasi kiritilib, to'la metrik fazoda aniqlangan har qanday siqiluvchi akslantirish yagona qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lishi haqidagi asosiy teoremaning mazmuni ochib berildi. Keltirilgan misollar orqali siqiluvchi va siquvchi bo'lmagan akslantirishlar farqi hamda funksional tenglamalarning yagona yechimga ega bo'lish shartlari asoslab berildi[5]. Olingan natijalar funksional analiz, differensial va integral tenglamalar nazariyasida muhim amaliy ahamiyatga ega bo'lib, ushbu yo'nalishdagi masalalarni yechishda nazariy asos bo'lib xizmat qiladi.

Xulosa qilib aytganda, qisqartirib aks ettirish printsipti matematik ta'lim jarayonida muhim didaktik ahamiyatga ega bo'lib, o'quvchilarda murakkab tushunchalarni soddalashtirilgan, tizimli va mantiqiy shaklda o'zlashtirish imkonini yaratadi[3]. Ushbu printsipti orqali ortiqcha tafsilotlardan voz kechilib, asosiy mazmun va muhim bog'lanishlar ajratib ko'rsatiladi, bu esa bilimlarning mustahkam va ongli o'zlashtirilishiga xizmat qiladi[4]. Qisqartirib aks ettirish printsiptining amaliy tadbirlari, xususan, sxema, jadval, diagramma, model va qisqa yozuvlar orqali ifodalash boshlang'ich ta'limda o'quvchilarning tafakkurini rivojlantirish, ularning analiz va sintez qilish ko'nikmalarini shakllantirishda samarali hisoblanadi. Mazkur printsipti o'quvchilarning mustaqil fikrlashini qo'llab-quvvatlab, bilimlarni umumlashtirish va amaliyotda qo'llash imkoniyatlarini kengaytiradi[6].

Shu bois, qisqartirib aks ettirish printsiptidan ta'lim jarayonida tizimli va maqsadga muvofiq foydalanish matematika darslarining samaradorligini oshirishga, o'quvchilarning bilishga bo'lgan qiziqishini kuchaytirishga hamda puxta bilimlar shakllanishiga ijobiy ta'sir ko'rsatadi.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. - Москва: Наука, 1989.



2. Рудин У. *Функциональный анализ*. - Москва: Мир, 1975.
3. Qayumova G. RAQAMLI MUHITDA TA'LIM SIFATINI OSHIRUVCHI OMILLAR //Science and innovation. – 2022. – Т. 1. – №. B5. – С. 289-292.
4. Qayumova G. A. Matematika fanini o'qitishda talabalarning mustaqil ishlash kompetentsiyani rivojlantirish //Экономика и социум. – 2024. – №. 11-2 (126). – С. 343-348.
5. Qayumova G. RAQAMLASHTIRILGAN MUHITDA MUSTAQIL ISHLASH KOMPETENSIYASINI RIVOJLANTIRISHDA AXBOROT TEXNOLOGIYALARNING O'RNI //Science and innovation. – 2022. – Т. 1. – №. B8. – С. 505-508.
6. Qayumova G. RAQAMLASHTIRILGAN MUHITDA MUSTAQIL ISHLASH KOMPETENSIYASINI RIVOJLANTIRISHDA AXBOROT TEXNOLOGIYALARNING O'RNI //Science and innovation. – 2022. – Т. 1. – №. B8. – С. 505-508.