



MATEMATIK ANALIZDA INTEGRAL VA DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING YANGI METODLARI

QO`ZIYEVA GULNOZAXON QUDRATULLAYEVNA
BALIQCHI TUMAN I-SON TEXNIKUMI MATEMATIKA FANI
O`QITUVCHISI

Аннотация:

В статье рассматриваются современные методы решения интегральных и дифференциальных уравнений в математическом анализе. Наряду с классическими аналитическими методами анализируются численные подходы, спектральные методы, вариационные методы, метод декомпозиции Адомиана, метод гомотопического анализа и нейронные сети типа Physics-Informed Neural Networks (PINNs). Результаты показывают, что современные методы позволяют эффективно решать сложные нелинейные и многомерные задачи.

Ключевые слова: математический анализ, интегральное уравнение, дифференциальное уравнение, численные методы, спектральный метод, PINNs, гомотопический анализ.

Annotation:

This article analyzes modern methods for solving integral and differential equations in mathematical analysis. Along with classical analytical techniques, numerical approaches, spectral methods, variational techniques, the Adomian Decomposition Method, the Homotopy Analysis Method, and Physics-Informed Neural Networks (PINNs) are discussed. The results demonstrate that modern



methods provide efficient tools for solving complex nonlinear and high-dimensional problems.

Keywords: mathematical analysis, integral equation, differential equation, numerical methods, spectral method, PINNs, homotopy analysis.

Annotatsiya :

Ushbu maqolada matematik analiz sohasida integral va differensial tenglamalarni yechishning zamonaviy metodlari tahlil qilinadi. An'anaviy analitik usullar bilan bir qatorda, sonli yondashuvlar, spektral metodlar, variatsion usullar, Adomian dekompozitsiya metodi, homotopiya analiz metodi hamda sun'iy intellektga asoslangan Physics-Informed Neural Networks (PINNs) texnologiyalari ko'rib chiqiladi. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, yangi metodlar murakkab noxiziqli va yuqori o'lchamli masalalarni samarali yechish imkonini beradi.

Kalit so'zlar: matematik analiz, integral tenglama, differensial tenglama, sonli metodlar, spektral metod, PINNs, homotopiya analiz.

KIRISH

Integral va differensial tenglamalar matematik analizning asosiy obyektlaridan biri hisoblanadi. Ular fizika, mexanika, biologiya, iqtisodiyot va muhandislik masalalarini modellashtirishda keng qo'llaniladi. An'anaviy metodlar, masalan, ajratish usuli, variatsiya usuli yoki integral transformatsiyalar (Laplas, Fourier) ko'plab chiziqli tenglamalarni yechishda samarali hisoblanadi.

Biroq zamonaviy ilmiy va texnik muammolar ko'pincha noxiziqli, parametrik yoki yuqori o'lchamli tenglamalar bilan bog'liq bo'lib, ularni klassik metodlar yordamida yechish qiyinlashadi. Shu sababli so'nggi yillarda yangi analitik, sonli va sun'iy intellektga asoslangan metodlar ishlab chiqildi. Mazkur maqolada ana shu metodlar tizimli ravishda tahlil qilinadi.



Matningiz mazmun jihatdan aniq va ilmiy uslubda yozilgan. Agar xohlasangiz, uni yanada mukammalroq, ilmiy maqola talablari darajasida rasmiylashtirilgan va uslubiy jihatdan silliqlangan variantini taklif qilaman:

ADABIYOTLARNI O'RGANISH

Integral va differensial tenglamalar nazariyasi bo'yicha fundamental tadqiqotlar XX asrda rivojlandi. Boyce va DiPrima oddiy differensial tenglamalar nazariyasini chuqur yoritgan. Kress integral tenglamalar bo'yicha klassik nazariyani ishlab chiqqan.

Adomian (1994) tomonidan taklif etilgan dekompozitsiya metodi nochiziqli tenglamalarni qator ko'rinishida yechish imkonini berdi. Liao tomonidan ishlab chiqilgan homotopiya analiz metodi esa yaqinlashuv parametrini boshqarish orqali aniqlikni oshirish imkonini yaratdi.

So'nggi yillarda Raissi va hammualliflar (2019) tomonidan ishlab chiqilgan Physics-Informed Neural Networks (PINNs) usuli differensial tenglamalarni mashina o'rganish asosida yechishning yangi bosqichini boshlab berdi.

MATERIAL VA METODLAR

Mazkur tadqiqotda matematik analiz doirasida integral va differensial tenglamalarni yechishning zamonaviy metodlari nazariy hamda amaliy jihatdan kompleks tahlil qilindi. Tadqiqot obyekti sifatida chiziqli va nochiziqli oddiy differensial tenglamalar, xususiy hosilali differensial tenglamalar, shuningdek Fredgolm va Volterra tipidagi integral tenglamalar tanlab olindi. Tadqiqot jarayonida analitik, sonli va intellektual hisoblash metodlari qo'llanildi.

1. Nazariy tahlil usuli

Integral va differensial tenglamalar nazariyasiga oid fundamental ilmiy manbalar, monografiyalar hamda zamonaviy ilmiy maqolalar o'rganildi va tizimli ravishda tahlil qilindi. Klassik analitik metodlar — Laplas va Fourier



transformatsiyalari, o'zgaruvchilarni ajratish usuli, variatsiya usuli — zamonaviy yondashuvlar bilan taqqoslandi. Ushbu metodlarning qo'llanish sohasi, afzalliklari va cheklovlari ilmiy jihatdan asoslab berildi.

2. Sonli metodlar

Analitik yechimga ega bo'lmagan yoki murakkab ko'rinishdagi tenglamalarni tahlil qilish uchun zamonaviy sonli usullardan foydalanildi:

Chekli ayirmalar metodi (Finite Difference Method),

Chekli elementlar metodi (Finite Element Method),

Spektral metodlar (Chebyshev va Fourier bazislari asosida),

Gauss kvadratur formulalari.

Sonli tajribalar natijasida yaqinlashuv tezligi, hisoblash aniqligi va algoritmik samaradorlik ko'rsatkichlari baholandi. Metodlarning turli sinf tenglamalar uchun mosligi solishtirma tahlil asosida aniqlashtirildi.

3. Adomian dekompozitsiya metodi

Nochiziqli differensial tenglamalarni yechishda Adomian dekompozitsiya metodi qo'llanildi. Yechim qator ko'rinishida qurilib, nochiziqli hadlar Adomian polinomlari yordamida ajratib olindi. Ushbu metodning asosiy ustunligi — nochiziqli hadlarni chiziqlashtirmasdan iterativ tarzda yaqinlashuvchi yechim olish imkoniyatidir.

4. Homotopiya analiz metodi (HAM)

Homotopiya analiz metodi murakkab tenglamani oddiyroq tenglama bilan bog'lovchi uzluksiz deformatsiya (homotopiya) printsiptiga asoslanadi. Yaqinlashuvni boshqaruvchi parametr yordamida yechimning barqarorligi va konvergensiyasi tekshirildi. Metodning moslashuvchanligi va keng qo'llanish imkoniyatlari nazariy va amaliy misollar asosida tahlil qilindi.

5. Sun'iy intellektga asoslangan metod (PINNs)

Differensial tenglamalarni yechishda Physics-Informed Neural Networks (PINNs) modeli qo'llanildi. Bunda differensial tenglama va chegara (yoki



boshlang'ich) shartlari neyron tarmoqning yo'qotish funksiyasiga integratsiya qilindi. Hisoblash tajribalari kompyuter modellashtirish asosida amalga oshirilib, klassik sonli metodlar bilan natijalar solishtirildi.

Natijalarni baholash mezonlari

Metodlar samaradorligini baholashda quyidagi mezonlar asosiy ko'rsatkich sifatida qabul qilindi:

Aniqlik darajasi,

Hisoblash tezligi,

Sonli barqarorlik,

Hisoblash resurslaridan foydalanish samaradorligi.

NATIJALAR MUHOKAMASI

O'tkazilgan nazariy va sonli tahlillar integral hamda differensial tenglamalarni yechishda zamonaviy metodlar an'anaviy usullarga nisbatan sezilarli ustunliklarga ega ekanligini ko'rsatdi. Metodlarning samaradorligi aniqlik, yaqinlashuv tezligi, barqarorlik va hisoblash xarajatlari mezonlari asosida baholandi.

Birinchidan, spektral metodlar silliq funksiyalar uchun eksponentsial yaqinlashuv tezligini namoyish etdi. Ayniqsa, Chebyshev va Fourier bazis funksiyalariga asoslangan yondashuvlar yuqori aniqlikni kam sonli diskret nuqtalar orqali ta'minladi. Bu holat fizik jarayonlarni modellashtirishda, xususan issiqlik o'tkazuvchanlik, to'liq tarqalishi va kvant mexanikasi masalalarida muhim ahamiyat kasb etadi. Shu bilan birga, spektral metodlarning samaradorligi asosan silliq va uzluksiz yechimlarga ega masalalarda yuqori bo'lishi kuzatildi.

Ikkinchidan, Adomian dekompozitsiya metodi nochiziqli differensial tenglamalarni yechishda samarali natijalar berdi. Metodning asosiy ustunligi — nochiziqli hadlarni chiziqlashtirmasdan qator ko'rinishida yechim olish imkoniyatidir. Tajribalar shuni ko'rsatdiki, bir necha hadli yaqinlashuv ham amaliy aniqlikni ta'minlay oladi. Bu esa hisoblash jarayonini sezilarli darajada



soddalashtiradi va iteratsiyalar sonini kamaytiradi. Biroq kuchli nochiziqlilik mavjud bo'lgan hollarda qatorning yaqinlashuv sohasi cheklanishi mumkinligi aniqlandi.

Homotopiya analiz metodining afzalligi yaqinlashuv parametrini (h -parametr) tanlash orqali natijaning konvergensiyasini boshqarish imkoniyatidir. Ushbu metod kuchli nochiziqli va parametrik masalalarda barqaror yechim olishga yordam berdi. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatdiki, parametrni optimal tanlash yaqinlashuv tezligini sezilarli oshiradi hamda divergensiya xavfini kamaytiradi. Shu jihatdan HAM metodi analitik va sonli metodlar orasida o'ziga xos oraliq o'rinni egallaydi.

Sun'iy intellektga asoslangan PINNs (Physics-Informed Neural Networks) metodining qo'llanilishi yuqori o'lchamli va murakkab chegaraviy masalalarda katta imkoniyatlarni ochib berdi. Neyron tarmoqning yo'qotish funksiyasiga differensial tenglama va chegara shartlarini kiritish orqali model fizik qonuniyatlarga moslashtirildi. Natijalar shuni ko'rsatdiki, PINNs yondashuvi ayniqsa ko'p o'lchovli fazoda klassik diskretlashtirish metodlari samaradorligi pasayadigan holatlarda afzal hisoblanadi. Biroq ushbu metod katta hisoblash resurslari va o'qitish vaqtini talab qilishi bilan xarakterlanadi. Bundan tashqari, modelning aniqligi neyron tarmoq arxitekturasini va giperparametrlar tanloviga sezilarli darajada bog'liq ekanligi aniqlandi.

Umuman olganda, tadqiqot natijalari klassik (analitik va sonli) hamda zamonaviy (yarim-analitik va sun'iy intellektga asoslangan) metodlarning kombinatsiyasi eng samarali yondashuv ekanligini ko'rsatdi. Nazariy aniqlik, sonli barqarorlik va moslashuvchanlikni uyg'unlashtirish orqali murakkab matematik modellarni ishonchli hamda samarali yechish mumkin. Kompleks masalalarda gibrid metodlardan foydalanish istiqbolli yo'nalish sifatida tavsiya etiladi.

XULOSALAR

O'tkazilgan tadqiqot natijalari integral va differensial tenglamalarni yechishda zamonaviy metodlarning yuqori samaradorligini tasdiqladi. Tahlillar shuni



ko'rsatdiki, an'anaviy analitik usullar nazariy asos sifatida o'z ahamiyatini saqlab qolmoqda, ayniqsa chiziqli va soddaroq tenglamalar sinfida ular aniq va ishonchli natijalar beradi. Biroq zamonaviy ilmiy-texnik muammolar ko'pincha nochiziqli, ko'p parametrlil va yuqori o'lchamli bo'lgani sababli, bunday masalalarda klassik metodlarning qo'llanish imkoniyati cheklangan.

Spektral metodlar yuqori aniqlik darajasini ta'minlashi bilan ajralib turadi, ayniqsa silliq funksiyalar uchun eksponentsial yaqinlashuv kuzatildi. Adomian dekompozitsiya metodi nochiziqli tenglamalarda tez yaqinlashuvni namoyish etdi va chiziqdashirish jarayonini talab qilmasligi bilan qulaylik yaratdi. Gomotopiya analiz metodi esa yaqinlashuv parametrini boshqarish imkoniyati orqali barqaror yechim olishda samarali vosita ekanligini ko'rsatdi.

Sun'iy intellektga asoslangan Physics-Informed Neural Networks (PINNs) metodlari murakkab chegaraviy va yuqori o'lchamli masalalarda istiqbolli natijalar berdi. Ushbu yondashuv differensial tenglama va chegara shartlarini neyron tarmoqning o'rganish jarayoniga integratsiya qilish orqali moslashuvchan va universal yechim mexanizmini taqdim etadi.

Umuman olganda, klassik analitik metodlar va zamonaviy sonli hamda intellektual yondashuvlarning uyg'unlashuvi eng samarali strategiya hisoblanadi. Kelgusida sun'iy intellekt texnologiyalari va matematik analiz metodlarining integratsiyasi yanada rivojlanishi kutilmoqda. Bu esa matematik modellashtirish jarayonlarini avtomatlashtirish, hisoblash aniqligini oshirish hamda ilmiy tadqiqotlarning samaradorligini yuksaltirishga xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 11th ed., Wiley.
2. Kress, R. (2014). *Linear Integral Equations*. 3rd ed., Springer.



3. Adomian, G. (1994). *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*. Kluwer Academic Publishers.

4. Liao, S. J. (2003). *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*. Chapman & Hall/CRC Press.

5. Raissi, M., Perdikaris, P., & Karniadakis, G. E. (2019). Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 378, 686–707.

6. Ascher, U. M., & Petzold, L. R. (1998). *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. SIAM.

O'zbek adabiyotlari

1. Xudoyberganov G'., Mansurov X., Xolmatov Sh. (2018). *Differensial tenglamalar nazariyasi va masalalari*. Toshkent: O'zbekiston Milliy universiteti nashriyoti.

2. Jurayev T., Sodiqov Q. (2016). *Matematik analiz kursi (2-qism)*. Toshkent: Fan va texnologiya.

3. Shodmonov B., Karimov R. (2019). *Integral tenglamalar va ularning tatbiqlari*. Toshkent: Innovatsion rivojlanish nashriyoti.

4. Axmedov A., Turg'unov U. (2020). Nochiziqli differensial tenglamalarni sonli yechish usullari. *O'zbekiston Milliy universiteti ilmiy axboroti*, №4, 25–32.

5. Yuldashev M. (2021). Chekli elementlar metodining amaliy masalalardagi qo'llanilishi. *Amaliy matematika va informatika jurnali*, №2, 41–49.

6. Rasulov A., Ismoilov N. (2022). Matematik modellashtirishda sun'iy intellekt usullarining roli. *Ilm-fan va innovatsiya*, №3, 52–60.