



PTOLEMEY TEOREMASI VA UNING XOSSALARI

Mashrapov Quvonchbek

Toshkent tumani 1-son texnikumi matematika o'qituvchisi

Annotatsiya

Mazkur maqolada Evklid geometriyasining muhim natijalaridan biri bo'lgan Ptolemey teoremasi, uning matematik mohiyati, asosiy xossalari va amaliy qo'llanilishlari yoritiladi. Aylana ichiga chizilgan to'rtburchaklar uchun tomonlar va diagonallar orasidagi bog'lanish nazariy va amaliy misollar orqali tushuntiriladi. Shuningdek, teoremaning kundalik hayot va texnik masalalardagi ahamiyati qisqacha tahlil qilinadi.

Kalit so'zlar: Ptolemey teoremasi, aylana ichiga chizilgan to'rtburchak, Evklid geometriyasi, Ptolemey tengsizligi, trapetsiya, amaliy misollar.

Kirish

Geometriya matematikaning eng qadimiy va fundamental bo'limlaridan biri bo'lib, undagi ko'plab teoremlar bugungi kunda ham o'z ahamiyatini yo'qotmagan. Shunday teoremlardan biri – Ptolemey teoremasi bo'lib, u eramizning II asrida yashagan yunon olimi Klavdiy Ptolemey nomi bilan bog'liq. Ushbu teorema aylana ichiga chizilgan to'rtburchak tomonlari va diagonallari o'rtasidagi aniq algebraik bog'lanishni ifodalaydi.

Ptolemey teoremasi nafaqat sof geometriyada, balki trigonometrik munosabatlar, astronomiya, optika va zamonaviy matematik modellashtirishda ham muhim o'rin tutadi. Mazkur maqolaning asosiy maqsadi – Ptolemey teoremasining mazmunini, uning xossalari va umumlashmalarini akademik darajada bayon qilishdan iborat.

1. Ptolemey teoremasining ta'rifi



1.1. Aylana ichiga chizilgan to'rtburchak

Agar to'rtburchakning barcha uchlari bitta aylana ustida yotsa, u **aylana ichiga chizilgan to'rtburchak** (yoki siklik to'rtburchak) deyiladi. Bunday to'rtburchaklar bir qator muhim geometrik xossalarga ega.

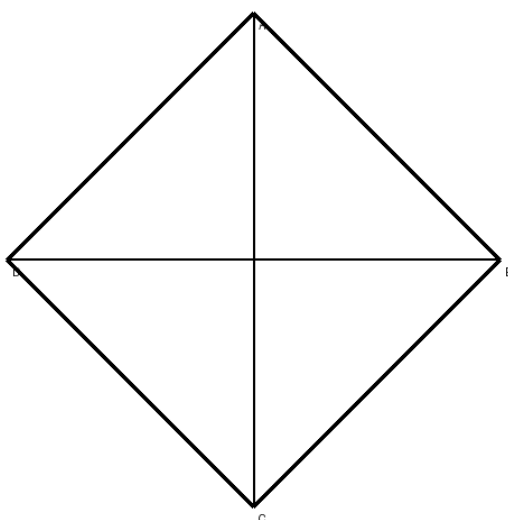
1.2. Teorema bayoni

Ptolemey

teoremasi

quyidagicha

ifodalanadi:



Aylana ichiga chizilgan ixtiyoriy to'rtburchakda diagonallar ko'paytmasi qarama-qarshi tomonlar ko'paytmalari yig'indisiga teng:

Agar ABCD siklik to'rtburchak bo'lsa, u holda

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Bu yerda AB, BC, CD, AD – to'rtburchakning tomonlari, AC va BD esa uning diagonallaridir.

2. Ptolemey teoremasining isboti



2.1. Klassik geometrik isbot

Klassik isbot Evklid geometriyasiga asoslanadi. ABCD aylana ichiga chizilgan to'rtburchak bo'lsin. AC diagonali ustida shunday E nuqta tanlaymizki, $\angle ABE = \angle CBD$ bo'lsin. Bu holda hosil bo'lgan uchburchaklar o'xshashligi yordamida tomonlar orasidagi nisbatlar aniqlanadi va natijada Ptolemey formulasi hosil qilinadi.

Mazkur isbotda aylana ichidagi burchaklar tengligi va o'xshash uchburchaklar nazariyasi muhim rol o'ynaydi.

2.2. Trigonometrik isbot

Ptolemey teoremasini trigonometrik usulda ham isbotlash mumkin. Aylana ichiga chizilgan to'rtburchakda sinuslar teoremasidan foydalanib, tomonlar va diagonallarni markaziy burchaklar orqali ifodalash mumkin. Tegishli trigonometrik tengliklarni soddalashtirish natijasida teorema osonlik bilan kelib chiqadi.

Bu yondashuv teoremaning trigonometrik formulalar bilan chuqur bog'liqligini ko'rsatadi.

3. Ptolemey teoremasining asosiy xossalari

3.1. Zarur va yetarli shart

Ptolemey teoremasi muhim xossalardan biriga ega: agar ixtiyoriy to'rtburchak uchun

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

tenglik bajarilsa, u holda bu to'rtburchak albatta aylana ichiga chizilgan bo'ladi. Demak, Ptolemey tengligi siklik to'rtburchak uchun zarur va yetarli shartdir.



3.2. To'g'ri to'rtburchak holi

Agar siklik to'rtburchak to'g'ri to'rtburchak bo'lsa, uning diagonallari teng bo'ladi. Bu holda Ptolemey teoremasi Pifagor teoremasining umumlashgan ko'rinishiga olib keladi.

3.3. Teng yonli trapetsiya

Aylana ichiga chizilgan trapetsiya faqat va faqat teng yonli bo'lgandagina mavjud bo'ladi. Bunday trapetsiya uchun Ptolemey teoremasi maxsus algebraik munosabatlarni hosil qiladi.

4. Ptolemey tengsizligi va umumlashmalar

4.1. Ptolemey tengsizligi

Agar to'rtburchak aylana ichiga chizilmagan bo'lsa, u holda quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Bu tengsizlik **Ptolemey tengsizligi** deb ataladi. Tenglik faqat siklik to'rtburchak uchun bajariladi.

4.2. Metrik fazolardagi umumlashmasi

Zamonaviy matematikada Ptolemey tengsizligi umumiy metrik fazolarga ham tatbiq etiladi. Ayrim metrik fazolar Ptolemey fazolari deb atalib, ular geometriya va funksional analizda muhim ahamiyatga ega.

5. Amaliy qo'llanilishlar



5.1. Geodeziya va qurilishda masofalarni aniqlash (hayotiy misol)

Amaliy o'lchash ishlarida ba'zan to'g'ridan-to'g'ri masofani o'lchash imkoni bo'lmaydi. Masalan, daryo yoki chuqurlik bilan ajralgan to'rt nuqta aylana shaklida joylashgan deb qaralsa, Ptolemey teoremasi yordamida diagonallar va ma'lum tomonlar orqali noma'lum masofani hisoblash mumkin. Bu usul geodeziya va qurilish amaliyotida qo'llaniladi.

5.2. Mexanik konstruksiyalarda hisoblashlar (hayotiy misol)

Mexanik qurilmalarda ayrim tayanch nuqtalar aylana bo'ylab joylashgan bo'lishi mumkin. Bunday holatda konstruksiyaning barqarorligini tekshirishda yoki kuchlar nisbatini baholashda siklik to'rtburchak modeli qo'llaniladi. Ptolemey teoremasi yordamida elementlar uzunliklari orasidagi bog'lanish aniqlanib, muhandislik hisoblari soddalashtiriladi.

Xulosa

Ptolemey teoremasi Evklid geometriyasining muhim va chuqur natijalaridan biri bo'lib, aylana ichiga chizilgan to'rtburchaklar nazariyasining markazida turadi. Uning tenglik va tengsizlik ko'rinishlari nafaqat klassik geometriyada, balki zamonaviy matematikada ham muhim ahamiyat kasb etadi. Ushbu maqolada teoremaning asosiy jihatlari, xossalari va amaliy qo'llanilishlari tahlil qilindi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Euclid. *Elements*. Book III–IV.
2. Ptolemy, C. *Almagest*. Cambridge University Press.
3. Posamentier, A. S. *Challenging Problems in Geometry*. Dover Publications.
4. Coxeter, H. S. M. *Introduction to Geometry*. Wiley.
5. Pedoe, D. *Geometry: A Comprehensive Course*. Dover Publications.