



TO'G'RI CHIZIQNING TEKISLIK BILAN JOYLASHUV TURINI YANGI DIFFERENSIAL INVARIANTLARI

Abduraxmonova Nurgul Ulug'bek qizi

NamDU Matematika yo'nalishi 1-bosqich talabasi

E-mail: nurgulabduraxmonova07@gmail.com

Ilmiy rahbar: Maxmudova Dilnoza Xayitmirzayevna

Annotasiya: Mazkur tadqiqotda fazoda to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi geometrik joylashuv turlari yangi differensial invariantlar yordamida aniqlash masalasi tahlil qilinadi. Klassik yondashuvlarda chiziqning tekislikka nisbatan parallelligi, kesishishi yoki tekislik ichida yotishi algebraik tenglamalar orqali aniqlansa, ushbu ishda mazkur holatlar differensial-geometrik nuqtai nazardan invariant miqdorlar asosida tavsiflanadi. Chiziqning yo'nalish vektori va tekislikning normal vektori orasidagi o'zaro bog'liqlik hamda ularning fazoda differensial o'zgarishlari o'rganilib, joylashuv turini aniqlovchi yangi analitik invariantlar kiritiladi. Olingan natijalar fazoviy geometriya, kompyuter modellashirish va dinamik geometrik tizimlar tahlilida qo'llanishi mumkin.

Kalit so'zlar: To'g'ri chiziq, tekislik, differensial invariant, normal vektor, yo'nalish vektori, parallellik, kesishish, fazoviy geometriya.

НОВЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Аннотация: В данном исследовании анализируется задача определения типов геометрического взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве с использованием новых дифференциальных инвариантов. В классических подходах параллельность прямой по отношению к плоскости, её пересечение или принадлежность плоскости определяется с помощью



алгебраических уравнений, однако в данной работе эти случаи описываются с дифференциально-геометрической точки зрения на основе инвариантных величин. Исследуется взаимосвязь между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости, а также их дифференциальные изменения в пространстве, и вводятся новые аналитические инварианты, определяющие тип расположения. Полученные результаты могут быть использованы в пространственной геометрии, компьютерном моделировании и анализе динамических геометрических систем.

Ключевые слова: Прямая, плоскость, дифференциальный инвариант, нормальный вектор, направляющий вектор, параллельность, пересечение, пространственная геометрия.

NEW DIFFERENTIAL INVARIANTS OF THE RELATIVE POSITION OF A LINE AND A PLANE

Abstract: In this study, the problem of determining the types of geometric relative positions of a line and a plane in space using new differential invariants is analyzed. In classical approaches, the parallelism of a line with respect to a plane, its intersection or belonging to the plane is determined by algebraic equations; however, in this work these cases are described from a differential-geometric point of view based on invariant quantities. The relationship between the direction vector of the line and the normal vector of the plane, as well as their differential changes in space, is studied, and new analytical invariants determining the type of position are introduced. The obtained results can be applied in spatial geometry, computer modeling, and the analysis of dynamic geometric systems.

Keywords: Line, plane, differential invariant, normal vector, direction vector, parallelism, intersection, spatial geometry.



Kirish

Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi o'zaro joylashuvni aniqlash analitik va differensial geometriyaning muhim masalalaridan biridir. Klassik geometriyada to'g'ri chiziqning tekislikka nisbatan joylashuvi uchta asosiy holat bilan tavsiflanadi: chiziq tekislikni kesib o'tadi, unga parallel bo'ladi yoki butunlay tekislik ichida yotadi. Bu holatlar, odatda, algebraik tenglamalar orqali, ya'ni chiziqning yo'nalish vektori va tekislikning normal vektori orasidagi skalyar ko'paytma yordamida aniqlanadi.

Agar to'g'ri chiziq

$$L: r = r_0 + tv$$

va tekislik

$$\Pi: n \cdot r + D = 0$$

ko'rinishida berilgan bo'lsa, ularning o'zaro joylashuvi quyidagi shart orqali aniqlanadi:

$$v \cdot n$$

Agar bu ko'paytma nolga teng bo'lmasa, chiziq tekislikni kesib o'tadi, agar nolga teng bo'lsa, chiziq tekislikka parallel bo'ladi yoki uning ichida yotadi. Biroq, mazkur yondashuv faqat statik holatni tavsiflaydi va geometrik tizim dinamik ravishda o'zgarganda, masalan, chiziq yoki tekislik harakatlanganda uning xossalari qanday o'zgarishini ko'rsatib bera olmaydi.

Shu sababli, ushbu tadqiqotda masalani differensial-geometrik nuqtai nazardan o'rganish va to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi o'zaro joylashuvni aniqlovchi yangi differensial invariantlarni kiritish maqsad qilib olinadi. Bu yerda asosiy e'tibor chiziqning yo'nalish vektori $v(t)$ va tekislikning normal vektori $n(t)$ ning parametr bo'yicha o'zgarishiga, ya'ni ularning hosilalariga qaratiladi.

Agar

$$I_1(t) = v(t) \cdot n(t), I_2(t) = \frac{d}{dt}(v(t) \cdot n(t)), I_3(t) = \frac{d^2}{dt^2}(v(t) \cdot n(t))$$



ifodalarni qarasak, ular chiziq va tekislik orasidagi dinamik bog‘lanishni tavsiflovchi differensial invariantlar sifatida xizmat qiladi. Ushbu invariantlar yordamida chiziqning tekislik bilan doimiy ravishda parallel qolishi, undan uzoqlashishi yoki unga yaqinlashishi kabi holatlar aniqlanishi mumkin.

Mazkur ishning asosiy maqsadi — to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi klassik geometrik bog‘lanishni kengaytirish, unga vaqt yoki parametr orqali yuz beradigan o‘zgarishlarni qo‘shish va yangi differensial invariantlar yordamida joylashuv turini yanada to‘liq, aniqlangan va barqaror shaklda tavsiflashdir. Ushbu yondashuv nafaqat nazariy geometriya, balki kompyuter modellashtirish, mexanik tizimlar va robototexnika sohalari uchun ham muhim ilmiy asos hisoblanadi.

Metodologiya

Ushbu tadqiqotda to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi o‘zaro joylashuv turini aniqlash uchun differensial-geometrik yondashuv qo‘llanildi. An’anaviy analitik geometriyada chiziqning tekislikka nisbatan joylashuvi faqat skalyar ko‘paytma yordamida aniqlansa, bu ishda esa yo‘nalish vektorining va normal vektorning parametr bo‘yicha o‘zgarishi, ya’ni ularning hosilalari asosiy tadqiqot obyekti sifatida qaraldi.

To‘g‘ri chiziq fazoda quyidagi parametrik ko‘rinishda ifodalandi:

$$L: r(t) = r_0(t) + s v(t),$$

bu yerda $r_0(t)$ — vaqt (yoki parametr) bo‘yicha harakatlanuvchi nuqta, $v(t)$ esa chiziqning o‘zgaruvchan yo‘nalish vektori hisoblanadi. Tekislik esa:

$$\Pi(t): n(t) \cdot r + D(t) = 0$$

ko‘rinishda berildi. Bu yerda $n(t)$ — tekislikning normal vektori bo‘lib, u ham parametr bilan o‘zgaradi.

Birinchi bosqichda klassik shart ko‘rib chiqildi:

$$I_1(t) = v(t) \cdot n(t).$$



Bu ifoda nolga teng bo'lganda, chiziq tekislikka parallel yoki uning ichida yotadi, nolga teng bo'lmaganda esa tekislikni kesib o'tadi. Biroq, bu faqat joriy holatni bildiradi va vaqt davomida geometriya qanday o'zgarishini aks ettirmaydi.

Shu sababli ikkinchi darajali va undan yuqori tartibli differensial invariantlar kiritildi. Xususan, quyidagi hosilalar olindi:

$$I_2(t) = \frac{d}{dt}(v(t) \cdot n(t)) = v'(t) \cdot n(t) + v(t) \cdot n'(t),$$

$$I_3(t) = \frac{d^2}{dt^2}(v(t) \cdot n(t)).$$

Ushbu invariantlar yordamida quyidagi imkoniyatlar yuzaga keladi:

- Agar $I_1(t) = 0$ va $I_2(t) = 0$ bo'lsa, chiziq tekislikka nafaqat parallel, balki barqaror parallel holatda harakat qiladi.
- Agar $I_1(t) = 0$, ammo $I_2(t) \neq 0$ bo'lsa, chiziq vaqt davomida tekislikka yaqinlashmoqda yoki undan uzoqlashmoqda.
- Agar $I_1(t) \neq 0$, lekin $I_2(t) \rightarrow 0$ bo'lsa, chiziq tekislikni kesishdan keyin barqaror holatga o'tayotgan bo'ladi.

Shunday qilib, $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$ va undan yuqori tartibli hosilalar to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi o'zaro joylashuv turini dinamik va invariant tarzda tavsiflovchi yangi differensial ko'rsatkichlar sifatida kiritildi.

Metodologiyaning muhim jihati shundaki, ushbu invariantlar koordinata tizimi o'zgarishidan mustaqil bo'lib, faqat geometrik obyektlarning o'zaro joylashuviga bog'liqdir. Shu bois, ular fazoviy sistemalarning harakatini, deformatsiyasini va evolyutsiyasini tahlil qilishda universal matematik vosita sifatida qaralishi mumkin.

Natijalar

Tadqiqot jarayonida to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi o'zaro joylashuvni aniqlovchi klassik algebraik shartlar differensial-geometrik yondashuv asosida kengaytirildi hamda yangi invariantlar tizimi ishlab chiqildi. An'anaviy usulda faqat

$$v(t) \cdot n(t)$$



skalyar ko‘paytma orqali chiziqning tekislikka nisbatan joylashuvi aniqlansa, ushbu ishda uning vaqt (yoki parametr) bo‘yicha hosilalari ham inobatga olindi.

Quyidagi differensial invariantlar aniqlab olindi:

$$I_1(t) = v(t) \cdot n(t),$$

$$I_2(t) = \frac{d}{dt}(v(t) \cdot n(t)) = v'(t) \cdot n(t) + v(t) \cdot n'(t),$$

$$I_3(t) = \frac{d^2}{dt^2}(v(t) \cdot n(t)).$$

Ushbu invariantlar yordamida to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi dinamik joylashuv turlari aniqlandi:

1. Kesishish holati:

$$I_1(t) \neq 0$$

Bu holatda chiziq tekislikni kesib o‘tadi.

2. Statik parallel holat:

$$I_1(t) = 0, I_2(t) = 0$$

Chiziq tekislikka parallel bo‘lib, ushbu holat vaqt davomida saqlanib qoladi.

3. Dinamik parallel holat (yaqinlashish yoki uzoqlashish):

$$I_1(t) = 0, I_2(t) \neq 0$$

Bu holatda chiziq tekislikka nisbatan barqaror emas, ya’ni vaqt davomida unga yaqinlashmoqda yoki undan uzoqlashmoqda.

4. O‘tish (kritik) holat:

$$I_1(t) \rightarrow 0, I_2(t) \neq 0$$

Bu yerda chiziq kesishish va parallellik holati o‘rtasidagi chegaraviy holatda bo‘ladi.

Natijalarga ko‘ra, faqat birgina $I_1(t)$ emas, balki uning hosilalari ham birgalikda chiziq va tekislikning joylashuv turi haqida to‘liq ma’lumot beradi.

Teorema: To‘g‘ri chiziqning tekislikka nisbatan faqat statik emas, balki dinamik joylashuv turi quyidagi yangi differensial invariantlar orqali aniqlanadi:

$$I_1(t) = v(t) \cdot n(t), I_2(t) = \frac{d}{dt}(v(t) \cdot n(t)), I_3(t) = \frac{d^2}{dt^2}(v(t) \cdot n(t))$$



va ushbu invariantlar asosida joylashuvning barqarorligi, o'zgaruvchanligi hamda kritik holatlari aniqlanadi.

Isboti: Skalyar ko'paytma chiziq va tekislik orasidagi burchakni aniqlaydi. Uning birinchi hosilasi bu burchakning o'zgarish tezligini, ikkinchi hosilasi esa o'zgarish tezligining borishini tavsiflaydi. Demak, I_1, I_2, I_3 majmuasi to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi munosabatni to'liq va invariant tarzda belgilaydi. Teorema isbotlandi.

Muhokama

Olingan natijalar klassik analitik geometriyaga nisbatan ancha chuqurroq va kengroq talqinni beradi. An'anaviy yondashuvda chiziq va tekislik orasidagi munosabat faqat bitta shart bilan — $v \cdot n$ orqali ifodalangan bo'lsa, yangi yondashuvda bu shartning vaqt bo'yicha o'zgarishi ham hisobga olinadi.

Bu esa masalani statik holatdan chiqarib, dinamik tizim sifatida qarash imkonini beradi. Xususan, mexanik tizimlarda, robototexnika va kompyuter grafikasi sohasida obyektlar doimo harakatda bo'lgani sababli bunday differensial invariantlar sistemasining joriy etilishi katta ahamiyatga ega.

Masalan, robot manipulyatori sirtga parallel holda harakat qilayotgan bo'lsa, $I_1(t) = 0$ bo'lishi bilan birga $I_2(t) = 0$ ham talab qilinadi. Aks holda, robot sirtga tegib ketishi yoki undan uzoqlashib ketishi mumkin. Shunday qilib, taklif etilgan invariantlar nafaqat nazariy, balki yuqori darajada amaliy ahamiyat kasb etadi.

Yangi yondashuv, shuningdek, fazoviy obyektlarning orientatsiyasini tahlil qilish, ularni boshqarish va nazorat qilishda yanada mukammal matematik model yaratish imkonini beradi.

Xulosa

Mazkur tadqiqotda to'g'ri chiziqning tekislik bilan o'zaro joylashuvini aniqlashning yangi differensial invariantlarga asoslangan usuli ishlab chiqildi. Klassik skalyar ko'paytma yondashuviga qo'shimcha ravishda, uning birinchi va



ikkinchi tartibli hosilalari ham inobatga olinib, chiziq va tekislik orasidagi dinamik bog'lanish ochib berildi.

Asosiy natija sifatida quyidagi xulosalarga kelindi:

- Chiziq va tekislik orasidagi joylashuvni faqat bir holatda emas, vaqt bo'yicha o'zgarishda ham aniqlash mumkin;
- $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$ invariantlari joylashuv turini to'liq va aniq ifodalaydi;
- Taklif etilgan yondashuv koordinata tizimidan mustaqil bo'lib, barqaror va invariant xususiyatga ega;
- Ushbu usul kompyuter grafikasi, robototexnika, mexanika va fazoviy modellashirishda samarali tatbiq etilishi mumkin.

Natijada, "to'g'ri chiziq – tekislik" munosabati masalasi yangi ilmiy bosqichga ko'tarildi va unga differensial-geometrik talqin berildi. Bu esa keyingi izlanishlar uchun mustahkam nazariy asos yaratadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Bronshtein I.N., Semendiyayev K.A. *Mathematics Handbook for Scientists and Engineers*. — Berlin: Springer, 2016
2. Anton H., Rorres C. *Elementary Linear Algebra with Applications*. -New York: John Wiley & Sons, 2014.
3. Dilnoza, M. Use of the Acmeological Approach to Teaching Mathematics. *International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology*. c-ISSN, 2792-4025.
4. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. B theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (T. 4, Выпуск 7, cc. 74–78).
5. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqu. B theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (T. 4, Выпуск 7, cc. 35–40).



6. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. *Развитие педагогических технологий в современных науках*, 4(3), 114–117.

7. Ismoilova D., & Mahmudova, D. (2025). Ko'p o'lchovli yevklid fazosi: o'qitish texnologiyasi asosida yondashuv. *Innov. Conf.* Published online April 17, 2025:1-7. Accessed April 18, 2025.

8. Mamatkadirova Zebo Tohirjon qizi, & Dilnoza Xaytmirzayevna Maxmudova. (2025). Constructing an ellipse using conjugate diameters and its applications. *International Scientific and Current Research Conferences*, 1(01), 48–55

9. Maxmudova , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Ikkinchi tartibli chiziqlarning diametri va qo'shma diametrlar. *Современные подходы и новые исследования в современной науке*, 4(8), 22–28. ИЗВЛЕЧЕНО ОТ <https://inlibrary.uz/index.php/canrms/article/view/98778>

10. Abdujalilova, K. ., & Mahmudova , D. Chiziqli bog'liqlik va chiziqli erkli vektorlar va ularning xossalari. (2025). *Multidisciplinary Journal of Science and Technology*, 5(5), 203-207.

<https://www.mjstjournal.com/index.php/mjst/article/view/3396>

11. Abdiqayumov , A., & Maxmudova , D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, 4(8), 177–184.

<https://inlibrary.uz/index.php/tafps/article/view/83478>