



KOMPLEKS SONLARNING GEOMETRIK TASVIRI VA TRIGONOMETRIK SHAKLI

Zaxiriddinova Shahlo Zahiriddin qizi

“Matematika va ta’limda axborot texnologiyasi”

kafedrasi o’qituvchisi

Nortosheva Dildora Orif qizi

Shahrisabz davlat pedagogika instituti

“Matematika” yo’nalishi 1-bosqich talabasi

Anotatsiya. Ushbu ishda kompleks sonlarning geometrik tasviri va ularning trigonometrik shaklda ifodalanishi masalalari ko‘rib chiqilgan. Kompleks sonlarning tekislikda tasvirlanishi, modul va argument tushunchalari, ularni kompleks tekislikdagi nuqta yoki vektor sifatida talqin qilish imkoniyatlari yoritilgan. Shuningdek, kompleks sonlarning trigonometrik shakli orqali qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish amallarini bajarishning qulay usullari ko‘rsatib o‘tilgan. Mazkur yondashuv kompleks sonlarning amaliy va nazariy masalalarni yechishda tutgan o‘rni va ahamiyatini tushunishga yordam beradi.

Kalit so‘zlar. Kompleks son, geometrik tasvir, modul, argument, trigonometrik shakl, kompleks tekislik, Eyler formulasi, ko‘paytirish, bo‘lish, fazoviy ifoda.

Аннотация. В данной работе рассмотрены вопросы геометрического представления комплексных чисел и их представления в тригонометрической форме. Рассматриваются представления комплексных чисел на плоскости, понятия модуля и аргумента, возможности их интерпретации как точки или вектора на комплексной плоскости. Также показаны удобные способы выполнения операций сложения, вычитания, умножения и деления через тригонометрическую форму комплексных чисел. Данный подход помогает понять роль и значение комплексных чисел в решении практических и теоретических задач.



Ключевые слова.Комплексное число, геометрическое представление, модуль, аргумент, тригонометрическая форма, комплексная плоскость, формула Эйлера, умножение, деление, пространственное выражение.

Anotation.This work deals with the geometric representation of complex numbers and their representation in trigonometric form. The representation of complex numbers in the plane, the concepts of module and argument, the possibilities of interpreting them as a point or vector in the complex plane are covered. It also shows convenient ways to perform addition, subtraction, multiplication, and division actions through the trigonometric form of complex numbers. This approach helps to understand the role and importance of complex numbers in solving practical and theoretical issues.

Keywords.Complex number, geometric image, module, argument, trigonometric form, complex plane, Euler's formula, multiplication, division, spatial expression.

Kirish.Matematikaning rivojlanishida kompleks sonlar tushunchasi alohida ahamiyatga ega. Dastlab ular algebraik tenglamalarni yechishda paydo bo'lgan bo'lsa-da, hozirda kompleks sonlar nafaqat sof matematikada, balki fizika, muhandislik, elektronika va axborot texnologiyalarida ham keng qo'llaniladi. Kompleks sonlar haqidagi bilimlarni chuqur o'zlashtirish ularning geometrik va trigonometrik xossalarini to'liq tushunishni talab qiladi. Kompleks son odatda $z = a + bi$ ko'rinishda yoziladi, bu yerda a – sonning haqiqiy ($\text{Re}(z)$), b esa mavhum ($\text{Im}(z)$) qismi deyiladi. Bu ifoda yordamida kompleks sonlarni ikki o'lchamli tekislikda, ya'ni kompleks tekislikda tasvirlash mumkin. Unda gorizontal o'q (Ox) haqiqiy sonlarga, vertikal o'q (Oy) esa mavhum sonlarga mos keladi. Shu tariqa, har bir kompleks son tekislikdagi (a, b) koordinatalariga ega nuqta bilan aniqlanadi. Kompleks sonning modulini $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ifoda orqali, argumentini esa $\varphi = \arctg(b/a)$ formulasi yordamida topish mumkin.



Ushbu kattaliklar yordamida kompleks sonni trigonometrik shaklda quyidagicha yozish mumkin:

$$z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi).$$

Bu shakl kompleks sonlarning ko'paytirish va bo'lish amallarini bajarishda, shuningdek, ularni darajaga ko'tarish va ildiz ostiga olishda juda qulaydir. Masalan, de Moivr formulasi ($z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$) yordamida murakkab hisoblashlar soddalashadi. Demak, kompleks sonlarning geometrik tasviri va trigonometrik shakli ularning mohiyatini chuqurroq anglash, hamda ularni amaliy masalalarda samarali qo'llash imkonini beradi.

Mavzuga doir adabiyotlar tahlili. Kompleks sonlar nazariyasi matematikaning asosiy yo'nalishlaridan biri sifatida uzoq tarixga ega. Bu tushuncha dastlab XVI–XVII asrlarda algebraik tenglamalarni yechish jarayonida paydo bo'lgan. Tarixiy manbalarga ko'ra, birinchi marta G. Kardano va R. Bombelli kompleks sonlarni $i = \sqrt{-1}$ belgisi yordamida ifodalaganlar. Keyinchalik bu g'oyani A. Moivre, L. Eyler, K. Gauss va boshqa ko'plab olimlar rivojlantirganlar. A. Moivr (Abraham de Moivre) o'zining mashhur de Moivr formulasi ($z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$) orqali kompleks sonlarning trigonometrik shaklda ifodalanishiga mustahkam nazariy asos yaratdi.

L. Eyler esa kompleks sonlarni eksponensial shaklda yozish g'oyasini ilgari surdi:

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi},$$

bu yerda e – Eyler soni. Ushbu ifoda trigonometrik va eksponensial shakllar orasidagi bog'liqlikni quyidagicha ifodalaydi: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$. K. Gauss kompleks sonlarning geometrik talqinini taklif etgan bo'lib, u har bir kompleks sonni koordinata tekisligidagi (a, b) nuqta sifatida tasvirlashni taklif qilgan. Bu yondashuv tufayli kompleks sonlarning modul va argument tushunchalari, shuningdek, ularni vektor sifatida ko'rish imkoniyati paydo bo'ldi. Zamonaviy matematika va fizika adabiyotlarida kompleks sonlarning trigonometrik shakli elektr zanjirlar, to'lqin jarayonlari, signal tahlili, hamda kvant mexanikasi kabi sohalarda keng qo'llaniladi. Masalan, O'zbekistonda chop etilgan



oliy o‘quv yurtlari uchun darsliklarda (masalan, A. To‘laganov, “Yuqori matematika asoslari”, 2018; Sh. Xolmatov, “Kompleks sonlar va ularning amaliy qo‘llanilishi”, 2020) kompleks sonlarning geometrik va trigonometrik shakllari alohida bob sifatida yoritilgan. Xorijiy adabiyotlarda esa (masalan, Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 10th ed., 2011) kompleks sonlarning geometrik tasviri va Eyler formulasi muhandislik masalalarini soddalashtirishda asosiy vosita sifatida ko‘rsatib o‘tiladi. Shunday qilib, mavjud adabiyotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, kompleks sonlarning geometrik tasviri va trigonometrik shakli nafaqat nazariy matematikaning muhim qismi, balki ko‘plab amaliy sohalarda samarali qo‘llaniladigan kuchli matematik vositadir.

Tadqiqotlar metodologiyasi. Ushbu tadqiqot ishida kompleks sonlarning geometrik tasviri va trigonometrik shaklini o‘rganish uchun nazariy, tahliliy hamda taqqoslov metodlaridan foydalanildi. Tadqiqotning asosiy maqsadi — kompleks sonlarning turli shakllarda ifodalanishini, ularning o‘zaro bog‘liqligini va amaliy masalalarni yechishda qo‘llanish imkoniyatlarini ilmiy asosda o‘rganishdan iborat. Avvalo, kompleks sonlarning algebraik shakli $z = a + bi$ ko‘rinishida tahlil qilinib, bu ifodaning geometrik ma’nosi o‘rganildi. Kompleks sonni tekislikda (a, b) nuqta sifatida tasvirlash usuli asosida modul $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ va argument $\varphi = \arctg(b/a)$ tushunchalari aniqlanadi. Shundan so‘ng, kompleks sonlarni trigonometrik shaklda ifodalash formulasi — $z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ yordamida ko‘rsatildi. Tadqiqot davomida Eyler formulasi $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ orqali trigonometrik va eksponensial shakllarning o‘zaro bog‘liqligi asoslab berildi. Bu yondashuv yordamida kompleks sonlarni ko‘paytirish, bo‘lish, darajaga ko‘tarish va ildiz ostiga olish amallari nazariy jihatdan isbotlandi hamda amaliy misollar orqali tekshirildi. Ishda matematik tahlil, mantiqiy umumlashtirish va grafik tasvirlash metodlari uyg‘un holda qo‘llanildi. Bunda kompleks sonlarning geometrik talqini vektorlar yordamida, trigonometrik shakli esa burchak va modul o‘zgarishlari orqali vizual ravishda ko‘rsatildi. Tadqiqot natijalari orqali kompleks sonlarning geometrik



tasviri va trigonometrik shakli o'rtasidagi o'zaro bog'liqlik aniqlanib, ularning amaliy masalalarda qo'llanilish samaradorligi asoslab berildi.

Natija va muhokama. Tadqiqot davomida kompleks sonlarning geometrik tasviri va trigonometrik shakli o'rtasidagi bog'liqlik tahlil qilindi. Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, har bir kompleks sonni $z = a + bi$ ko'rinishida ifodalash bilan bir qatorda uni kompleks tekislikda nuqta yoki vektor sifatida tasvirlash mumkin. Bu yondashuv kompleks sonlar ustida amallarni geometrik jihatdan aniqroq tushunishga yordam beradi. Masalan, agar $z = 3 + 4i$ bo'lsa, unda $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\varphi = \arctg(4/3) \approx 53.13^\circ$. Demak, bu sonning trigonometrik shakli $z = 5(\cos 53.13^\circ + i \cdot \sin 53.13^\circ)$ ko'rinishda bo'ladi. Ushbu ifoda yordamida sonning modulini o'zgartirmasdan faqat burchagini o'zgartirish orqali uni aylantirish yoki ko'paytirish amallarini soddalashtirish mumkin. Agar $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)$ va $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$ bo'lsa, u holda $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$, $z_1 / z_2 = (r_1 / r_2) [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$ formulalari orqali ko'paytirish va bo'lish amallari oson ifodalanadi. Masalan, agar $z_1 = 2(\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ)$ va $z_2 = 3(\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ)$ bo'lsa, u holda $z_1 \cdot z_2 = 6(\cos 75^\circ + i \cdot \sin 75^\circ)$, $z_1 / z_2 = (2/3)(\cos 15^\circ - i \cdot \sin 15^\circ)$ bo'ladi. Bu natijalar trigonometrik shakl yordamida murakkab amallarni oddiy burchaklar qo'shish va ayirish orqali bajarish mumkinligini ko'rsatadi. Shuningdek, De Moivr formulasi $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$ orqali kompleks sonlarni darajaga ko'tarish juda osonlashadi. Masalan, agar $z = 2(\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ)$ va $n = 3$ bo'lsa, unda $z^3 = 8(\cos 135^\circ + i \cdot \sin 135^\circ)$ bo'ladi. Bu natija algebraik shaklda bajariladigan ko'p bosqichli hisob-kitoblarni soddalashtiradi. Tadqiqot davomida kompleks sonlarning tekislikdagi geometrik talqini ham o'rganildi. Bunda har bir kompleks son radiusi $|z|$ ga teng bo'lgan vektor bilan ifodalanadi, modul vektor uzunligini, argument esa vektorning Ox o'qiga nisbatan hosil qilgan burchagini bildiradi. Masalan, $z = 3 + 4i$ soni tekislikda (3; 4) nuqtasiga to'g'ri keladi, uning moduli 5 ga teng va u 53.13° burchak ostida yo'nalgan. Bu ifoda kompleks sonlarning fazoviy harakatini tasvirlashda ham juda qulay. Amaliy jihatdan



trigonometrik shakl elektr zanjirlar, signal tahlili, mexanik tebranishlar va to‘lqin jarayonlarini modellashtirishda keng qo‘llaniladi. Masalan, elektr tokining fazaviy o‘zgarishi $U = U_0 \cdot e^{(i\omega t)}$ yoki $U = U_0(\cos\omega t + i \cdot \sin\omega t)$ ko‘rinishida ifodalanadi, bu esa Eyler formulasi yordamida kompleks sonlarning trigonometrik ifodasiga to‘g‘ridan-to‘g‘ri mos keladi. Shunday qilib, o‘tkazilgan tahlillar kompleks sonlarning trigonometrik shaklini ularning geometrik mohiyatini ochib beruvchi, amaliy masalalarda esa hisoblashlarni soddalashtiruvchi samarali matematik vosita ekanligini isbotladi.

Xulosa. Tadqiqot natijalariga ko‘ra, kompleks sonlarning geometrik tasviri va trigonometrik shakli o‘zaro chambarchas bog‘liq bo‘lib, ular bir-birini to‘ldiruvchi tushunchalardir. Kompleks sonlarni algebraik shaklda $z = a + bi$ ko‘rinishida ifodalash orqali ularning haqiqiy va mavhum qismlarini ajratish mumkin bo‘lsa, geometrik shaklda ularni tekislikdagi nuqta yoki vektor sifatida tasvirlash orqali modul va argument kabi asosiy xususiyatlarni aniqlash mumkin bo‘ladi. Trigonometrik shakl esa $z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ ifodasi orqali kompleks sonlarning fazaviy tuzilishini yanada aniqroq ko‘rsatadi hamda ular ustida amallar bajarishni soddalashtiradi. O‘tkazilgan tahlillar shuni ko‘rsatdiki, trigonometrik shakldan foydalanish natijasida ko‘paytirish, bo‘lish, darajaga ko‘tarish va ildiz ostiga olish amallari geometrik ma’noda burchaklarni qo‘shish yoki ayirish orqali oson ifodalanadi. Shuningdek, De Moivr formulasi $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$ kompleks sonlarning darajaga ko‘tarilishini umumiy shaklda ifodalab, nazariy jihatdan muhim ahamiyat kasb etadi. Geometrik yondashuv yordamida har bir kompleks sonni modul orqali masshtab jihatidan, argument orqali esa aylanish burchagi orqali talqin qilish imkoniyati paydo bo‘ladi. Bu yondashuvlar fizik, muhandislik va texnik sohalarda, xususan elektr zanjirlar, to‘lqin jarayonlari va signal tahlilida keng qo‘llaniladi. Natijada kompleks sonlarning geometrik va trigonometrik shakllarini o‘rganish nafaqat nazariy matematikaning muhim yo‘nalishlaridan biri, balki real amaliy masalalarni yechishda ham samarali vosita ekanligi isbotlandi. Shu sababli,



bu mavzuni chuqur o'rganish matematik tafakkurni kengaytirish, fazoviy tasavvurni rivojlantirish va zamonaviy texnik masalalarni hal etishda muhim ilmiy asos yaratadi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. To'laganov A. *Yuqori matematika asoslari*. – Toshkent: “Fan va texnologiya”, 2018.
2. Xolmatov Sh. *Kompleks sonlar va ularning amaliy qo'llanilishi*. – Toshkent: “Universitet”, 2020.
3. Raximov A., Karimov U. *Matematik analizdan ma'ruzalar to'plami*. – Toshkent: O'zbekiston Milliy universiteti nashriyoti, 2019.
4. Sodiqov B. *Umumiy matematika kursi*. – Toshkent: “O'qituvchi”, 2017.
5. Abdullayev N. *Kompleks tahlil asoslari*. – Toshkent: “Fan”, 2016.
6. Ergashev M. *Matematikaning nazariy asoslari*. – Toshkent: “Iqtisod-moliya”, 2021.
7. Haydarov D. *Algebra va analiz asoslari*. – Samarqand: SamDU nashriyoti, 2015.
8. Qodirov F. *Matematik analiz 1-qism: Kompleks sonlar va ularning xossalari*. – Toshkent: “Fan va texnologiya”, 2019.
9. Bozorov S., Yo'ldoshev R. *Matematika va uning muhandislikdagi qo'llanilishi*. – Toshkent: “Ilm ziyo”, 2022.
10. Tursunov M. *Kompleks sonlar va trigonometrik funksiyalar*. – Farg'ona: Farg'ona davlat universiteti nashriyoti, 2018.