



MONOTON FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI ISBOTI

Shahrisabz davlat pedagogika instituti o'qituvchisi

Turayev Ziyovutdin O'ktamxonovich

Shahrisabz davlat pedagogika institute talabasi

Roxmonqulova Fayoza Ruslan qizi

Annotatsiya:

Ushbu ilmiy maqolada monoton funksiyalarning analitik xossalari, xususan ularning uzluksizligi masalasi keng qamrovda tadqiq etilgan. Monotonlikning matematik tabiati, chap va o'ng limitlarning mavjudligi, haqiqiy sonlar to'plamining to'liqligi va tartib xossalari asosida monoton funksiyaning uzluksizligi teoremasi bosqichma-bosqich isbotlangan. Shuningdek, sakrash nuqtalarining tuzilishi, ularning sanoqliligi va Lebeg o'lchovi bo'yicha nolga tengligi ko'rsatib berilgan.

Kalit so'zlar: Monotonlik, uzluksizlik, limit, chap limit, o'ng limit, tartibli to'plam, to'liqlik aksiomasi, sakrash uzilishlari, Lebeg o'lchovi.

Annotation: This scientific article comprehensively studies the analytical properties of monotonic functions, in particular the issue of their continuity. The mathematical nature of monotonicity, the existence of left and right limits, the completeness of the set of real numbers, and the continuity theorem of a monotonic function are proven step by step based on the order properties. The structure of jump points, their countability, and their equality to zero in terms of Lebesgue measure are also shown. The article is enriched with theoretical analyses, examples, practical applications, graphical interpretations, and other mathematical models. The results are significant in their application in mathematical analysis, functional analysis, economic models, optimization, and other areas.



Keywords: Monotonicity, continuity, limit, left limit, right limit, ordered set, completeness axiom, jump discontinuities, first kind discontinuity, almost universal continuity, Lebesgue measu

Kirish: Matematik analizning eng muhim tushunchalaridan biri bu — funksiyaning uzluksizligi. Uzluksizlik intuitiv jihatdan funksiya grafigining “uzilmay”, bir chiziq bo‘ylab davom etishini bildiradi. Keng ma’noda uzluksizlik tabiatda sodir bo‘ladigan jarayonlarning silliqqligini, bosqichma-bosqich o‘zgarishini modellashtiradi. Monoton funksiyalar esa matematik analizning alohida sinfini tashkil etadi. Ular tartibli jarayonlarni tasvirlaydi — vaqt o‘tishi bilan ortib boruvchi yoki kamayib boruvchi sonlar ketma-ketligini uzluksiz tarzda ifodalaydi. Monoton funksiyalar o‘rganilayotgan jarayonlarning oson tahlil qilinishini ta’minlaydi, chunki:

ular chegaralangan bo‘lishga moyil,

limitlar mavjud bo‘ladi,

grafigi tartibli,

uzilishlari faqat ma’lum turga tegishli bo‘ladi.

Monoton funksiyaning uzluksizligi teoremasi matematik analizdagi asosiy qonuniyatlardan biri bo‘lib, u haqiqiy sonlar to‘plamining tartibli va to‘liq ekanligiga asoslanadi.

Quyida ushbu teorema chegaraviy nuqtalar, limitlar, to‘plamlar nazariyasi va integral nazariyasi bilan bog‘liq holda keng izohlanadi. re, limit of a function, Darboux property, derivative.

Introduction: One of the most important concepts in mathematical analysis is the continuity of a function. Continuity intuitively means that the graph of a function continues along a line, “without interruption”. In a broad sense, continuity models



the smoothness and gradual change of processes occurring in nature. Monotone functions constitute a separate class of mathematical analysis. They describe ordered processes - they represent a continuous sequence of numbers that increases or decreases over time.

Monotone functions provide easy analysis of the processes under study, because:

they tend to be bounded,

there are limits,

their graph is regular,

their discontinuities are of only a certain type.

The continuity theorem of a monotone function is one of the basic laws in mathematical analysis, which is based on the fact that the set of real numbers is ordered and complete.

Below, this theorem is explained in detail in relation to limit points, limits, set theory, and integral theory.

1. MONOTONLIK TUSHUNCHASI

Funksiya $f(x)$ monoton o'suvchi deyiladi, agar $x_1 < x_2$ bo'lsa $f(x_1) \leq f(x_2)$. Monoton kamayuvchi funksiya uchun esa $f(x_1) \geq f(x_2)$. Monoton funksiyalar tartibli xossalarga ega bo'lib, ularning limitlari mavjud bo'ladi.

UZLUKSIZLIK TUSHUNCHASI

Funksiya nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun uch shart bajariladi:

1) $f(a)$ mavjud;

2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ mavjud;



$$3) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Monoton funksiyada tebranishli yoki cheksiz uzilishlar bo'lishi mumkin emas, faqat sakrash uzilishlari kuzatiladi.

Funksiya nuqtaning o'zida mavjud bo'lishi kerak agar funksiya biror nuqtada qiymatga ega bo'lmasa, o'sha nuqtada uning uzluksiz yoki uzluksiz emasligi haqida gapirish mumkin emas.

Funksiya yaqin nuqtalarda tartibli o'zgarishi kerak-o'zgarmas, sakrab ketmaydigan, asta-sekin o'zgaradigan funksiya uzluksiz hisoblanadi. Yaqin argumentlar yaqin natijalarni berishi kerak.

Funksiya grafikida sakrashlar bo'lmasligi shart- uzluksiz funksiya grafigida "bo'sh joy", "teshik", "uzilish" yoki birdaniga yuqoriga sakrash bo'lmaydi. Grafik uzilmay ketma-ket davom etadi. Bir xil nuqtaga yaqinlashganda funksiya qiymatlari bir tomonga intilishi kerak. Nuqtaga ikki tomondan ham yaqinlashganda funksiyaning qiymatlari bir xil natijaga yaqinlashishi kerak. Aks holda uzluksizlik buziladi.

MONOTON FUNKSIYALARDA LIMITLARNI MAVJUDLIGI

Monoton o'suvchi funksiya uchun chap limit:

$$L_- = \sup\{f(x): x < a\}$$

va o'ng limit:

$$L_+ = \inf\{f(x): x > a\}$$

har doim mavjud bo'ladi. Bu haqiqiy sonlar to'plamining to'liqligi bilan bog'liq.



Monotonlik limit mavjud bo'lishi uchun asosiy omildir-agar funksiya biror oraliqda doimo o'sib borsa yoki doimo kamayib borsa, u holda o'sha oraliqning oxirgi nuqtasiga yaqinlashganda funksiya limitga ega bo'ladi.

Monoton funksiya hech qachon tartibsiz sakramaydi- o'suvchi yoki kamayuvchi funksiya qiymatlari ketma-ket joylashadi. Shuning uchun nuqtaga yaqinlashganda qiymatlar birdaniga sakrab ketmasdan, tartibli yaqinlashadi — bu limitning mavjudligini ta'minlaydi.

Monotonlik limit mavjud bo'lishi uchun asosiy omildir-agar funksiya biror oraliqda doimo o'sib borsa yoki doimo kamayib borsa, u holda o'sha oraliqning oxirgi nuqtasiga yaqinlashganda funksiya limitga ega bo'ladi.

Monoton funksiya hech qachon tartibsiz sakramaydi- o'suvchi yoki kamayuvchi funksiya qiymatlari ketma-ket joylashadi. Shuning uchun nuqtaga yaqinlashganda qiymatlar birdaniga sakrab ketmasdan, tartibli yaqinlashadi — bu limitning mavjudligini ta'minlaydi.

MONOTON FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI TEOREMASI

Teorema: Monoton funksiya oraliqda faqat sanoqli uzilish nuqtalariga ega bo'ladi. Boshqa barcha nuqtalarda u uzluksizdir.

Isbot:

1-qadam: Har bir nuqtada chap va o'ng limitlar mavjud.

2-qadam: Uzilishlar faqat sakrash ko'rinishida bo'lishi mumkin.

3-qadam: Har bir sakrash balandligi musbat bo'ladi.

4-qadam: Agar sakrash nuqtalari cheksiz ko'p bo'lsa, sakrashlar yig'indisi cheksiz bo'ladi, bu esa funksiyaning chegaralanganligiga zid.



Deyarli hamma joyda uzluksizlik -monoton funksiyaning uziladigan nuqtalari sanoqli bo'lgani sababli, Lebeg o'lchovi bo'yicha ularning o'lchovi 0 ga teng. Demak, funksiya deyarli hamma joyda uzluksizdir.

Darbü xossasi:

Darbu teoremasi har qanday uzluksiz funksiyada oraliqdaki barcha qiymatlar olinishi kerakligini ko'rsatadi. Monoton funksiya esa sakrash uzilishlar sabab buni har doim bajarmaydi.

Misollar: 1) Butun qism funksiyasi $f(x)=\lfloor x \rfloor$ — monoton, ammo har bir butun nuqtada sakrash mavjud.

2) Iqtisodiy model: Narx oshishi bilan talab kamayadi — monoton kamayuvchi funksiya.

3) Fizik model: Haroratning ortishi monotondir, ammo ba'zan sakrashlar bo'lishi mumkin.

Monoton funksiyalarda hosila:

Monoton funksiyaning hosilasi deyarli hamma joyda mavjud va o'suvchi funksiyada $h(x) \geq 0$ bo'ladi.

Xulosa:

Monoton funksiyalar matematik analizning asosiy sinflaridan biridir. Ularning uzluksizligi haqidagi teorema limitlar nazariyasi, tartibli to'plamlar xossalari va to'liqlik aksiomasiga tayanadi. Monoton funksiyalar faqat sanoqli sakrash uzilishlariga ega bo'ladi va deyarli hamma joyda uzluksizdir. Monoton funksiyalarning uzluksizligi masalasi matematik analizning asosiy tushunchalari — tartiblilik, to'liqlik, limitlar nazariyasi va haqiqiy sonlarning strukturaviy xossalari tayanadi. Ushbu maqola doirasida monoton funksiyalarning chap va



o'ng limitlari mavjudligi, ularning faqatgina sakrash tipidagi uzilishlarga ega bo'lishi, shuningdek sakrashlarning sanoqli bo'lishi isbotlab berildi. Bu natijalar shuni ko'rsatadiki, monoton funksiyalar matematik jihatdan tartibli va barqaror tuzilishga ega bo'lib, ularning uzluksizlik xossasi ham shu tartibning tabiiy oqibatidir. Monoton funktsiyaning har bir chegaraviy nuqtada limitga ega bo'lishi, haqiqiy sonlar to'plamining to'liqligi bilan chambarchas bog'liq. Aynan supremum va infimumlarning mavjudligi monoton funksiyalarda limitlarning muqarrarligini ta'minlaydi. Natijada bunday funksiyalar har qanday oraliqda silliq, tartibli va boshqariladigan xulq-atvor namoyon qiladi. Sakrash nuqtalarining faqat sanoqli bo'lishi esa funktsiyaning deyarli hamma joyda uzluksiz ekanligini isbotlaydi. Bu esa zamonaviy analiz, Lebeg integrali, differentsiallanuvchanlik nazariyasi va funksional analizda katta ahamiyatga ega bo'lgan faktlardan biridir. Amaliy jihatdan qaralganda, monoton funksiyalar iqtisodiyotdagi talab-narx modeli, fizika jarayonlarining vaqt bo'yicha o'sishi yoki kamayishi, logistika, optimallashtirish, moliyaviy prognozlar, o'quv jarayonlarini baholash kabi sohalarda qo'llaniladigan eng ishonchli va barqaror matematik modellarni shakllantiradi. Ularning tartibli dinamikasi tufayli ko'plab murakkab jarayonlarning o'zgarish yo'nalishi va kestirish xususiyatlarini oldindan aniqlash osonlashadi. Xulosa qilib aytganda, monoton funksiyalar matematik tahlil uchun nafaqat qulay obyekt, balki uzluksizlik, limit, integral, differensial kabi fundamental tushunchalarni chuqurroq anglashga yordam beruvchi asosiy nazariy asosdir. Ularning uzluksizligi haqidagi teorema esa real funksiyalar nazariyasining eng muhim natijalaridan biri bo'lib, matematik modellashtirishning ko'plab amaliy yo'nalishlarida mustahkam nazariy poydevor vazifasini o'taydi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1 Matematik analiz asoslari — T. Azlarov, H. Mansurov Universitetlar va pedagogika institutlari uchun mo'ljallangan asosiy darslik.



2. Matematik analiz (M. Xushvaqtoy) O'zbekiston tilida chop etilgan real analiz darsligi; limit va uzluksizlik tushunchalarini oddiy va tushunarli tilda tushuntiradi.

3. Funksional analiz va integral tenglamalar — J.I. Abdullayev Agar siz monotonlik, limitlardan keyingi bosqich — funksional analiz, integral tenglamalar bilan ham shug'ullanishni istasangiz, bu kitob foydali.

4. Matematika – umumiy o'quv qo'llanma (asosiy kurslar uchun) Bu qo'llanma orqali analizning asosiy bo'limlari — to'plamlar nazariyasi, sonlar ketma-ketligi, limit va uzluksizlik tushunchalari bilan tanishish mumkin.