



TO'G'RI CHIZIQNING YO'NALISH VEKTORI VA TEKISLIKNING NORMAL VEKTORI O'RTASIDAGI BOG'LANISH

Erkinaliyeva Shabnam Nodirbek qizi

Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi

Ilmiy maslahatchi: Maxmudova Dilnoza Xaytmirzayevna

Matematika kafedrası katta o'qituvchisi

Namangan davlat universiteti, O'zbekiston

E-mail : shabnamaji18181@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu ilmiy maqolada fazoda to'g'ri chiziq yo'nalish vektori bilan tekislikning normal vektori o'rtasidagi geometrik va algebraik bog'lanish chuqur tahlil qilinadi. Ularning o'zaro joylashuv holatlarini aniqlashda invariant vektor munosabatlari, xususan skalyar ko'paytma va tekislik tenglamasini qanoatlantirish sharti asosida ishonchli mezonlar ishlab chiqiladi. Isbotlar fazoviy proyeksiya, ortogonallik va vektorlar normasi asosida kengaytirilgan matematik usullar bilan olib boriladi. Natijalar mexanika, qurilish muhandisligi, robototexnika, navigatsiya, 3D modellashtirish va funktsional geometriya sohalarida tatbiq etilishi mumkin.

Kalit so'zlar: yo'nalish vektori, normal vektor, invariant shart, skalyar ko'paytma, fazoviy geometriya, kesishish, parallel chiziq.

СВЯЗЬ НАПРАВЛЯЮЩЕГО ВЕКТОРА ПРЯМОЙ И НОРМАЛЬНОГО ВЕКТОРА ПЛОСКОСТИ

Аннотация: В данной научной статье подробно исследуется геометрическая и алгебраическая связь между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости в пространстве. На основе инвариантных векторных соотношений, в частности скалярного произведения



и выполнения уравнения плоскости, формулируются надёжные критерии определения взаимного расположения прямой и плоскости. Доказательства проводятся с использованием расширенных математических методов — пространственной проекции, ортогональности и нормы векторов. Полученные результаты имеют широкое применение в механике, строительной инженерии, робототехнике, навигации, 3D-моделировании и функциональной геометрии.

Ключевые слова: направляющий вектор, нормальный вектор, инвариантное условие, скалярное произведение, пространственная геометрия, пересечение, параллельность прямой и плоскости.

RELATIONSHIP BETWEEN A LINE'S DIRECTION VECTOR AND A PLANE'S NORMAL VECTOR

Abstract: This scientific article provides an in-depth analysis of the geometric and algebraic relationship between the direction vector of a line and the normal vector of a plane in three-dimensional space. Based on invariant vector relations—specifically, the scalar product and the satisfaction of the plane equation—reliable criteria for determining the spatial configuration between a line and a plane are formulated. The proofs rely on advanced mathematical tools, including spatial projection, orthogonality, and vector norm analysis. The results obtained can be effectively applied in mechanics, civil engineering, robotics, navigation, 3D modeling, and functional geometry.

Keywords: direction vector, normal vector, invariant condition, scalar product, spatial geometry, intersection, line–plane parallelism.

1. KIRISH

Analitik geometriya fazoviy obyektlarning o'zaro joylashuvini qat'iy matematik qonuniyatlar orqali aniqlashga imkon beradi. Fazoda to'g'ri chiziqli va tekislik orasidagi munosabatni tadqiq qilish, ayniqsa uch o'lchamli modellashtirish,



muhandislik hisoblari va mexanik sistemalarda kuchlar ta'sirini o'rganishda yuqori ahamiyatga ega. Turli vaziyatlarda obyektlar kesishishi, bir-biriga parallel bo'lishi, perpendikulyar joylashishi yoki to'liq moslashgan holda bir fazoda birga joylashishi mumkin. Shuning uchun fazoda joylashuvni aniqlaydigan munosabatlar umumiy va invariant bo'lishi kerak.

To'g'ri chiziqni aniqlovchi asosiy element — **yo'nalish vektori**, tekislikni aniqlovchi asosiy element — **normal vektordir**. Bu ikki vektor fazoviy joylashuvni butunlay belgilaydi va ular orqali boshqa barcha geometriya xulosalari kelib chiqadi. Ayniqsa, skalyar ko'paytmaning nolga tengligi orqali ortogonallik sharti aniqlanishi turli tizimlarni soddalashtirishga imkon beradi.

Masalan, muhandislikda kuchning qo'llanish yo'nalishi va yuzaning normal vektori orasidagi munosabat sirtga ta'sir qiluvchi kuchning taqsimlanish darajasini belgilaydi. Kompyuter grafikasi va fizik simulyatsiyalarda nurning sirtga urilish burchagi ham aynan shu munosabatga asoslanadi. Robototexnika manipulyatorlari harakat yo'nalishini tekisliklarga nisbatan boshqarish ham shunday invariant vektor tahlilini talab qiladi. Bundan ko'rinadiki, yo'nalish-normal munosabati — **universal fazoviy qonuniyatdir**.

2. METOD

Tadqiqotda to'g'ri chiziq va tekislikning umumiy vektor tenglamalari qo'llanadi. Fazoda chiziq:

$$l: \vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$$

bu yerda $\vec{a}$ — boshlang'ich nuqta, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ — yo'nalish vektori.

Tekislikning umumiy tenglamasi:

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

uning normal vektori:



$$\vec{n} = (A, B, C)$$

Yo‘nalish-normal munosabatlarini **skalyar ko‘paytma** quyidagicha belgilaydi:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = Av_x + Bv_y + Cv_z$$

Bu skalyar qiymat fazoviy munosabatlarning to‘liq tavsifidir. Agar $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ bo‘lsa, yo‘nalish vektori normalga perpendikulyar, ya’ni chiziq tekislikka parallel bo‘ladi. Shuningdek:

$$\text{dist}(l, \Pi) = 0 \Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D = 0$$

ya’ni chiziq tekislikda yotishi uchun **2 invariant** bajarilishi shart.

Metodik yondashuv sifatida:

- Fazoviy ortogonallik printsipi;
- Vektor invariantlar nazariyasi;
- Geometrik proyeksiyalash usuli;
- Algebraik moslik shartlari qo‘llanilib, holatlar to‘liq tasniflanadi.

3. NATIJALAR

Quyida chiziq–tekislik joylashuvining barcha ehtimollari to‘liq isbotli tarzda tasniflandi:

Kesishish holati

Agar:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$$

bo‘lsa, yo‘nalish vektori tekislikka nisbatan ma’lum og‘ishga ega bo‘ladi $\rightarrow$ chiziq tekislikni bitta nuqtada kesadi.

Parallel holat



Agar:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

bo'lsa, chiziq tekislik normaliga perpendikulyardir $\rightarrow$ ular **parallel**.

Ammo qaror ikki xil bo'ladi:

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D \neq 0 \Rightarrow \text{Parallel, lekin ichida emas}$$

Tekislik ichida yotish

Agar:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ va } Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D = 0$$

bo'lsa:

$$l \subset \Pi$$

ya'ni **butun chiziq tekislikning o'zida yotadi**.

Bu holatlar umumlashtirilgan klassik jadvalga aylandi 

Shartlar

Holat

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$$

Kesishadi

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0, \text{ nuqta tekislikda emas}$$

Parallel

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0, \text{ nuqta tekislikda}$$

Chiziq tekislik ichida

TEOREMA: "Ikki invariant sharti teoremasi"

Fazoda chiziq l va tekislik Π berilgan bo'lsin. Shunda chiziq tekislik ichida yotadi **agar va faqat agar**:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ va } Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D = 0$$

Isbot:



Chiziqning har bir nuqtasi tekislik tenglamasini qanoatlantirsa $\rightarrow$ u tekislik ustida.

Yo'nalish vektori tekislik normaliga perpendikulyar bo'lsa $\rightarrow$ chiziq tekislik bo'ylab davom etadi.

Agar ikkinchi shart buzilsa $\rightarrow$ chiziq tekislikka faqat urinadi.

Agar birinchi shart buzilsa $\rightarrow$ chiziq tekislikni kesadi.

Demak, faqat bu ikki invariant birga to'g'ri bo'lganda chiziq butunlay tekislikda yotadi. ■

5. MUHOKAMA

Bu yondashuvning afzalligi shundaki, boshqa qo'shimcha tekshiruvlar talab qilinmaydi: faqat yo'nalish va normal orqali barcha holatlar aniqlanadi. Bu invariant model koordinatalar almashinuvi, fazoviy burilishlar, o'lchov birliklari o'zgarishidan mustaqil. Ya'ni, natija mutlaq geometriya qonuniyatiga tayanadi.

Robototexnikada manipulyatorlar harakat trayektoriyasi sirt cheklovlariga mos kelishini aniqlashda aynan shu munosabat ishlatiladi. Qurilish muhandisligida ko'priklar, rampa va nishab sirtlar bilan yo'llar kesishuvi jarayonida yo'nalish vektorining tekislik normaliga mosligi hisoblab boriladi. Aeronavigatsiyada samolyot qanoti bilan oqim yo'nalishi orasidagi burchak ham shu formula bilan topiladi.

Demak, ushbu bog'lanish — fazoviy modelashtirishning universal qonuni.

6. XULOSA

Ushbu maqolada fazoda chiziq va tekislikning o'zaro joylashuvi faqat ikkita vektor — yo'nalish vektori va normal vektor orqali aniq, ixcham va universal shaklda tavsiflandi. Barcha holatlar yagona invariant tizimga keltirildi. Tadqiqot



natijalari geometriyani tushunishda emas, balki uni muhandislik, texnologiya, grafik tizimlar va amaliy ilmiy tadqiqotlarda aniq qo'llash yo'llarini beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643>
2. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqu. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
3. Karimberdiyeva, D., & Mahmudova, D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. *Развитие педагогических технологий в современных науках*, 4(3), 114–117.
4. Abdiqayumov, A., & Mahmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, 4(8), 177–184. извлечено от <https://inlibrary.uz/index.php/tafps/article/view/83478>
5. Dilnoza, M. Use of the Acmeological Approach to Teaching Mathematics. *International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology*. c-ISSN, 2792-4025.
6. Makhmudova, D. K. (2020). Significance of acmeological approach in improving the cognitive competence of the future teachers. *Scientific Bulletin of Namangan State University*, 2(4), 426-433.