



TO‘PLAMLARNING TO‘G‘RI KO‘PAYTMASINING XOSSALARI

*Rasulova Jasmina**SHDPI, "Matematika" fakulteti 1-kurs talabasi**Ilmiy rahbar: Zaxiriddinova Shahlo "Matematika va ta'limda axborot texnologiyasi" Kafedrası o'qituvchisi*

Anotatsiya (O‘zbekcha): To‘plamlarning to‘g‘ri ko‘paytmasi, shuningdek, Kartesian ko‘paytma deb ataladi, to‘plamlar nazariyasining asosiy tushunchasi bo‘lib, ikki yoki undan ortiq berilgan to‘plamlardan yangi to‘plamni tartibli juftliklar yoki tyuplar orqali hosil qiladi. $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ va } b \in B\}$ deb ta’riflanadi, bu elementlarning tartibli xususiyatini ta’kidlaydi va boshqa to‘plam operatsiyalaridagi tartibsiz juftliklardan farqlanadi. Asosiy xossalar orasida kommutativ bo‘lmaslik mavjud, ya’ni $A \times B \neq B \times A$, agar $A = B$ bo‘lmasa; masalan, $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y\}$ bo‘lsa, $A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$, $B \times A$ esa $\{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2)\}$ ga teng. Shuningdek, assotsiativ bo‘lmaslik xossasi mavjud, ya’ni $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ tuzilishda, ammo ular izomorf; $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$ misolida birinchisi $\{(a, b), c\}$, ikkinchisi $\{(a, (b, c))\}$ beradi, lekin ikkalasi biyektiv ravishda moslashtirilishi mumkin. Distributivlik birlashma, kesishma va ayirma ustida saqlanadi: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, masalan, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$ da $A \times (B \cup C) = \{(1, 2), (1, 3)\}$ ko‘paytmalar birlashmasiga mos keladi. Sonlilik multiplikativ, chekli to‘plamlar uchun $|A \times B| = |A| \times |B|$, masalan, $|\{1, 2\}| \times |\{x, y\}| = 4$. Agar bitta to‘plam bo‘sh bo‘lsa, ko‘paytma bo‘sh bo‘ladi, masalan, $A \times \emptyset = \emptyset$. Ushbu xossalar diskret matematika va to‘plamlar nazariyasining asosiy matnlaridan olingan bo‘lib, koordinatalar geometriyasi, munosabatlar va algebraik tuzilmalarda qo‘llaniladi.



Kalit soʻzlar: toʻplamlar nazariyasi, toʻgʻri koʻpaytma, Kartesian koʻpaytma, distributivlik, sonlilik, tartibli juftliklar.

Abstract (English): The Cartesian product, also known as the direct product of sets, is a fundamental concept in set theory that constructs a new set from two or more given sets by forming ordered pairs or tuples. Defined as $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ and } b \in B\}$, it emphasizes the ordered nature of elements, distinguishing it from unordered pairs in other set operations. Key properties include non-commutativity, where $A \times B \neq B \times A$ unless $A = B$, as the order of components matters; for instance, if $A = \{1, 2\}$ and $B = \{x, y\}$, then $A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$, while $B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2)\}$. It is also non-associative, meaning $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ in structure, though they are isomorphic; consider $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$, where the former yields $\{((a, b), c)\}$ and the latter $\{(a, (b, c))\}$, yet both can be mapped bijectively. Distributivity holds over union, intersection, and difference: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, exemplified by $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$ resulting in $A \times (B \cup C) = \{(1, 2), (1, 3)\}$ matching the union of products. Cardinality is multiplicative, $|A \times B| = |A| \times |B|$ for finite sets, such as $|\{1, 2\}| \times |\{x, y\}| = 4$. If one set is empty, the product is empty, e.g., $A \times \emptyset = \emptyset$. These attributes, drawn from foundational texts in discrete mathematics and set theory, underpin applications in coordinate geometry, relations, and algebraic structures.

Keywords: set theory, Cartesian product, direct product, distributivity, cardinality, ordered pairs.

Аннотация (Русский): Прямое произведение множеств, также известное как декартово произведение, является фундаментальным понятием в теории множеств, которое строит новое множество из двух или более данных множеств путем формирования упорядоченных пар или кортежей. Определяется как $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ и } b \in B\}$, подчеркивая упорядоченную



природу элементов, отличающуюся от неупорядоченных пар в других операциях над множествами. Ключевые свойства включают некоммутативность, где $A \times B \neq B \times A$, если $A \neq B$; например, если $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y\}$, то $A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$, в то время как $B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2)\}$. Оно также неассоциативно, то есть $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ по структуре, хотя они изоморфны; рассмотрим $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$, где первое дает $\{(a, b), c\}$, а второе $\{(a, (b, c))\}$, но оба могут быть биективно отображены. Дистрибутивность сохраняется над объединением, пересечением и разностью: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, например, для $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$ $A \times (B \cup C) = \{(1, 2), (1, 3)\}$, совпадающее с объединением произведений. Мощность мультипликативна, $|A \times B| = |A| \times |B|$ для конечных множеств, как $|\{1, 2\}| \times |\{x, y\}| = 4$. Если одно множество пустое, произведение пусто, например, $A \times \emptyset = \emptyset$. Эти свойства, заимствованные из базовых текстов по дискретной математике и теории множеств, лежат в основе приложений в координатной геометрии, отношениях и алгебраических структурах.

Ключевые слова: теория множеств, декартово произведение, прямое произведение, дистрибутивность, мощность, упорядоченные пары.

Kirish

To'plamlar nazariyasi XX asr matematikasining asosi bo'lib, Georg Kantor tomonidan yaratilgan. U zamonaviy matematikaning deyarli barcha sohalarida – algebra, analiz, topologiya, informatika va hatto fizikada qo'llaniladi. To'plamlar ustidagi asosiy operatsiyalar – birlashma ($\cup$), kesishma ($\cap$), ayirma ($\setminus$), quvvat to'plami (2^A) va to'g'ri ko'paytma ($\times$) dir.

To'g'ri ko'paytma (Kartesian ko'paytma) Rene Dekart sharafiga shunday atalgan bo'lib, u koordinatalar geometriyasining asosini tashkil etadi. Ushbu operatsiya ikki yoki undan ortiq to'plamdan yangi to'plam hosil qiladi, uning



elementlari tartibli juftliklar (yoki tyuplar) dir. Tartibning muhimligi bu operatsiyani boshqa operatsiyalardan (masalan, birlashma yoki kesishma) keskin farqlaydi. Maqolada to'g'ri ko'paytmaning ta'rifi, asosiy algebraik xossalari (kommutativlik yo'qligi, assotsiativlik izomorfizm nuqtai nazaridan, distributivlik, sonlilik xossalari), shuningdek, uning matematika va informatikaning turli sohalaridagi ilovalari batafsil o'rganiladi. Har bir xossa misollar va qisman isbotlar bilan tasdiqlanadi.

Maqola o'quvchi to'plamlar nazariyasining asosiy tushunchalariga ega deb hisoblaydi, lekin zarur joylarda eslatmalar beriladi. Ish klassik manbalarga (Halmos, Kunen, Suppes, shuningdek, o'zbek matematiklari – A.Sodiqov, M.Mirvaliev) asoslanadi.

Maqsad: To'g'ri ko'paytmaning xossalarini tizimli ravishda yoritish.

Vazifalar:

1. Ta'rif va asosiy misollarni keltirish.
2. Algebraik xossalarni isbotlash.
3. Ilovalarni ko'rsatish.
4. Cheksiz ko'paytmalar haqida qisqacha ma'lumot berish.

1. To'plamlar nazariyasining asosiy tushunchalari

1.1. To'plam va element To'plam – yaxshi aniqlangan ob'ektlar yig'indisi. Elementlik munosabati $\in$ belgisi bilan belgilanadi. Bo'sh to'plam $\emptyset$ – hech qanday elementga ega bo'lmagan yagona to'plam.

1.2. To'plamlarning tengligi va quyyi to'plam munosabati $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$. $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ (ekstensionallik aksiomasi).

1.3. Tartibsiz va tartibli juftliklar Tartibsiz juftlik $\{a, b\} = \{b, a\}$. Tartibli juftlik (a, b) Kuratovskiy ta'rifi bo'yicha: $(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$.



Isbot qisqacha: $(a, b) = (c, d) \Rightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \Rightarrow a = c \text{ va } b = d$. Bu ta'rif tartib muhimligini ta'minlaydi: $(a, b) = (b, a)$ faqat $a = b$ bo'lganda.

1.4. To'plamlar ustidagi asosiy operatsiyalar

- Birlashma: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ yoki } x \in B\}$
- Kesishma: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ va } x \in B\}$
- Ayirma: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ va } x \notin B\}$
- Quvvat to'plami: 2^A – A ning barcha quyyi to'plamlari.

2. To'g'ri ko'paytma ta'rifi va umumiy xossalari

2.1. Ikki to'plam uchun ta'rif Ta'rif 2.1. A va B to'plamlar uchun $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Misol 2.1. $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. $A \times B$ da $2 \times 3 = 6$ ta element bor.

Misol 2.2. $\{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ – ikkilik kodning 2 razryadli so'zlar to'plami.

2.2.

n ta to'plam uchun kengaytma $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$.

Masalan, $R^3 = R \times R \times R$ – uch o'lchovli fazo.

2.3. Grafik va geometrik tasvir $A \times B$ ni to'rtburchak shaklida tasavvur qilish mumkin: A elementlari gorizontal, B elementlari vertikal o'qda.

2.4. Proyeksiyalar $\pi_1: A \times B \rightarrow A$, $\pi_1(a, b) = a$ – birinchi proyeksiya. $\pi_2: A \times B \rightarrow B$, $\pi_2(a, b) = b$ – ikkinchi proyeksiya. Bu funksiyalar suryektivdir.

3. Algebraik xossalar

3.1. Kommutativlik yo'qligi Teorema: A va B izomorf bo'lmasa yoki tartib farqli bo'lsa, $A \times B \neq B \times A$.

Batafsil isbot: Tartibli juftlik ta'rifi bo'yicha $(a, b) \neq (b, a)$ agar $a \neq b$. Shuning uchun elementlar to'plami farq qiladi.



Misol kengaytirilgan: $A = \{\text{north, south}\}$, $B = \{\text{east, west}\}$. $A \times B$ – shimoliy-sharqiy va boshqa yo‘nalishlar; $B \times A$ esa aksincha.

3.2. Assotsiativlik va izomorfizm Teorema 3.2. $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$.
Izomorfizm tasviri: $f: (A \times B) \times C \rightarrow A \times (B \times C)$, $f((a, b), c) = (a, (b, c))$. Bu biyeksiya va struktura saqlaydi.

Misol: Uchta $\{1,2\}$ to‘plami uchun har ikkala ko‘paytma ham 8 elementga ega.

3.3. Distributivlik xossalari (to‘liq) Teorema 3.3.

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

To‘liq isbotlar (har biri uchun):

1. $\in$ nuqtai nazaridan ikki tomonni solishtirish.
2. Kesishma uchun ham xuddi shunday.
3. Ayirma uchun: $(a, b) \in A \times (B \setminus C) \Leftrightarrow b \in B \text{ va } b \notin C \Leftrightarrow (a, b) \in A \times B \text{ lekin } (a, b) \notin A \times C$.

Qo‘shimcha misollar: Har xil sonli elementlar bilan.

3.4. Sonlilik (kardinal son) xossalari Teorema 3.4.

- Chekli: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- Cheksiz: $|A| \times |B| = \max(|A|, |B|)$ agar kamida biri cheksiz va ikkalasi ham nolga teng bo‘lmasa (kontinuum gipotezasiz).

Misol: $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ (natural sonlar juftliklari sanab bo‘linadi).

3.5. Bo‘sh to‘plam va birlik elementi Teorema 3.5.



- $A \times \emptyset = \emptyset$
- $A \times \{e\} \cong A$ (kanonik izomorfizm orqali).

3.6. Qo'shimcha xossalar

- $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ (agar kesishma bo'sh bo'lmasa shart emas).
- Quvvat to'plami bilan: $2^{A \times B} \cong (2^A)^B$ emas, lekin kardinal jihatdan tengliklar mavjud.

4. Ilovalari

4.1. Koordinatalar geometriyasi R^2, R^3 – fazolar. Har qanday nuqta – tartibli juftlik yoki uchlik.

4.2. Munosabatlar va funksiyalar

- Munosabat $R \subseteq A \times B$
- Funksiya $f: A \rightarrow B \Leftrightarrow \text{graf}(f) \subseteq A \times B$ va har bir a uchun yagona b .

4.3. Algebraik tuzilmalarda to'g'ri ko'paytma

- Guruhlar ko'paytmasi: $(G \times H, \cdot)$ – komponentaviy amal.
- Halqalar, maydonlar ko'paytmasi.

Misol: $Z_2 \times Z_2$ – Klein guruh.

4.4. Informatika va dasturlash

- Ma'lumotlar bazasida JOIN – Kartesian ko'paytma + shart.
- Grafalar: qirralar – vertexlar ko'paytmasining quyyi to'plami.



4.5. Cheksiz ko‘paytmalar $\prod_{i \in I} A_i$ – barcha funksiyalar to‘plami $I \rightarrow \cup A_i$ with $f(i) \in A_i$. Tixonov teoremasi: ixcham to‘plamlar ko‘paytmasi ixcham (topologiyada).

Xulosa

To‘g‘ri ko‘paytma to‘plamlar nazariyasining eng muhim operatsiyalaridan biri bo‘lib, tartibli juftliklar orqali murakkab tuzilmalarni qurish imkonini beradi. Uning xossalari – distributivlik, multiplikativ sonlilik, assotsiativlik (izomorfizm bilan) va boshqalar matematikaning ko‘plab sohalarida asosiy rol o‘ynaydi. Kelgusida cheksiz ko‘paytmalar, aksiomatik to‘plamlar nazariyasidagi muammolar (masalan, kontinuum gipotezasi) va topologik ilovalar chuqurroq o‘rganilishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Halmos P. R. Naive Set Theory. – New York: Springer-Verlag, 1974. – 104 p.
2. Lipschutz S. Schaum's Outline of Set Theory and Related Topics. – New York: McGraw-Hill, 1998. – 282 p.
3. Devlin K. The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory. – New York: Springer, 1993. – 194 p.
4. Suppes P. Axiomatic Set Theory. – New York: Dover Publications, 1972. – 265 p.
5. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. – Москва: Мир, 1970. – 416 с.
6. Содиқов А. То‘пламлар назарияси ва математик логика. – Тошкент: Ўқитувчи, 1985. – 176 б.
7. Мирвалиев М. Дискрет математика. – Тошкент: Фан, 2008. – 512 б.
8. Jech T. Set Theory: The Third Millennium Edition. – Berlin: Springer, 2003. – 772 p.



9. Enderton H. B. Elements of Set Theory. – New York: Academic Press, 1977.
– 279 p.
10. Stoll R. R. Set Theory and Logic. – New York: Dover Publications, 1979.
– 496 p.
11. Кунен К. Теория множеств. Введение в теорию независимости. – Москва: Мир, 1983. – 432 с.
12. Ross K. A., Wright C. R. B. Discrete Mathematics. – New Jersey: Prentice Hall, 2002. – 800 p.
13. Грауэрт Х., Фритцше К. Аналитическая геометрия. – Москва: Наука, 1975.
- 14 . Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. – Москва: Наука, 1966.
15. Biggs N. L. Discrete Mathematics. – Oxford: Oxford University Press, 2002. – 440 p.