

KASR TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARDA KOSHI MASALASI: BANAX FIKS NUQTA TEOREMASI ORQALI MAVJUDLIK VA YAGONALIK SHARTLARI

Safarboyeva Maftuna Aminboy qizi

Xorazm viloyati Osiyo Xalqaro Universiteti

Masofaviy matematika magistratura 1-kurs talabasi

Annotatsiya. Mazkur maqolada kasr tartibli differensial tenglamalarda Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi Banax fiks nuqta teoremasi asosida asoslab beriladi. Tadqiqotning asosiy g'oyasi shundan iboratki, kasr hosilali tenglama mos integral operator orqali Volterra tipidagi integral tenglamaga ekvivalent o'tkaziladi va natijada yechim uzluksiz funksiyalar fazosida operatorning fiks nuqtasi sifatida talqin qilinadi. Banax fiks nuqta teoremasini qo'llash uchun operatorning qisqaruvchi tasvir ekanini ko'rsatish zarur bo'lib, buning uchun o'ng tomondagi funksiyaning Lipschitz sharti, shuningdek vaqt oraliqning uzunligi va kasr tartib parametri bilan bog'liq baholashlar keltiriladi.

Kalit so'zlar: kasr tartibli differensial tenglama, Koshi masalasi, Banax fiks nuqta teoremasi, qisqaruvchi tasvir, Lipschitz sharti, Volterra integral tenglama.

KIRISH

Kasr tartibli differensial tenglamalar xotira effekti va merosiy xususiyatlarni ifodalash imkoniyati bilan ko'plab amaliy sohalarida muvaffaqiyatli qo'llanmoqda. Viskoelastik materiallar, anomall diffuziya, biologik jarayonlar, elektr zanjirlar va iqtisodiy dinamikada tizimning hozirgi holati ko'pincha o'tmishdagi holatlar bilan bog'liq bo'ladi. Kasr hosila operatorlari aynan shu bog'liqlikni modellastiradi va shu sababli klassik differensial tenglamalarga nisbatan boyroq sinf hosil qiladi. Biroq modelning amaliy qiymati, avvalo, nazariy asosning mustahkamligiga tayanadi. Ya'ni masala to'g'ri qo'yilgan bo'lishi, yechim mavjud bo'lishi va u yagona bo'lishi kerak. Aks holda, bir xil boshlang'ich shartlar bilan bir nechta yechimlar paydo bo'lib, modelning prognoz qiymati yo'qoladi yoki umuman yechim bo'lmasa, masala fizik ma'noda ham, matematik ma'noda ham izohlanmaydi.

ASOSIY QISM

Masalani umumiy ko'rinishda qo'yamiz. T musbat son bo'lsin va $t \in [0, T]$ gacha oraliqda qaralsin. Kasr tartib parametri $\alpha \in [0, 1]$ gacha bo'lsin. Koshi masalasi quyidagicha yoziladi: kasr hosila operatori orqali $D^\alpha y(t) = f(t, y(t))$ va boshlang'ich shart $y(0) = y_0$. Bu yerda f funksiyasi t va y ga bog'liq nolinear funksiya bo'lib, uning xossalari yechimning mavjudligi va yagonaligini belgilaydi. D^α operatori sifatida Caputo hosilasini olsak, boshlang'ich shart klassik tarzda beriladi va integral

ko'rinishga o'tish osonlashadi. Mazkur bo'limda isbotning mohiyati hosilaning aniq formulasidan ko'ra, uning integral operator bilan bog'liqligiga tayanadi, chunki Banach teoremasi aynan integral operatorning normasi orqali ishlaydi.

Ekvivalent integral tenglama. Kasr hosilali tenglama kasr integral yordamida Volterra tipidagi integral tenglamaga ekvivalent bo'ladi. Mazmunan bu quyidagicha ifodalanadi: $y(t) = y_0 + I^\alpha f(s, y(s))$. Bu yerda I^α kasr integral operatori bo'lib, u yadrosi t minus s darajali α minus 1 ko'rinishida bo'lgan og'irlik bilan integrallashni bildiradi va Γ funksiyasi bilan normallashtiriladi. Ekvivalentlik shuni anglatadiki, agar y funksiya integral tenglamani qanoatlantirsa, u differensial tenglamaning yechimi bo'ladi va aksincha. Shunday qilib, Koshi masalasi operator tenglamaga aylanadi.

Fazo va operator tanlovi. $C[0, T]$ fazoni olamiz, bu 0 dan T gacha oraliqda uzluksiz funksiyalar to'plami. Bu fazoda sup norma bilan ishlaymiz: $\|y\| = \sup |y(t)|$. Endi operatorni aniqlaymiz: $A y(t) = y_0 + I^\alpha f(s, y(s))$. Shunda yechim masalasi $A y = y$ operator tenglamani yechishga keltiriladi. Banach fikslar nuqta teoremasi qo'llanishi uchun ikki narsa kerak bo'ladi: A operator metrik fazoda to'liq bo'lgan to'plamni o'ziga akslantirsin va A qisqaruvchi tasvir bo'lsin. $C[0, T]$ fazo sup norma ostida to'liq bo'lgani uchun, odatda yopiq shart ko'rinishidagi to'plam tanlanadi va A shu sharti o'ziga akslantirishi ko'rsatiladi.

A operatorning sharti o'ziga akslantirishi. Buning uchun f funksiyaning chegaralanganligini qabul qilamiz. Masalan, shunday M son mavjud bo'lsinki, t 0 dan T gacha va y ning modul qiymati R dan oshmaydigan sohada $|f(t, y)| \leq M$ bo'lsin. Agar $\|y - y_0\| \leq R$ bo'lgan sharti olsak, u holda $|A y(t) - y_0| = |I^\alpha f(s, y(s))| \leq I^\alpha M$. Kasr integralning birlik funksiyaga ta'siri T^α bilan baholanadi va natijada $|A y(t) - y_0| \leq M T^\alpha / \Gamma(1+\alpha)$. Agar R shunday tanlansinki, $M T^\alpha / \Gamma(1+\alpha) \leq R$ bo'lsa, A operator ushbu yopiq sharti o'ziga akslantiradi. Bu qadam mavjudlik uchun zarur bo'lgan texnik tayanch bo'lib, operatorning fikslar nuqtasi aynan shu cheklangan sohada qidirilishini ta'minlaydi.

Qisqaruvchanlik sharti. Endi yagonalikni beradigan asosiy shartga o'tamiz. f funksiyasi y bo'yicha Lipschitz shartini qanoatlantirsin, ya'ni shunday L musbat son mavjud bo'lsinki, barcha t 0 dan T gacha va barcha y_1, y_2 uchun $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$ bo'lsin. Endi $A y$ minus $A z$ farqini baholaymiz: $|A y(t) - A z(t)| = |I^\alpha [f(s, y(s)) - f(s, z(s))]| \leq I^\alpha [L |y(s) - z(s)|]$. Sup normani olsak $\|A y - A z\| \leq L \|y - z\| I^\alpha [1]$. Yana yuqoridagi baholashdan $I^\alpha [1] \leq T^\alpha / \Gamma(1+\alpha)$ kelib chiqadi. Natijada $\|A y - A z\| \leq q \|y - z\|$, bu yerda $q = L T^\alpha / \Gamma(1+\alpha)$. Agar $q < 1$ dan kichik bo'lsa, A operator qisqaruvchi tasvir bo'ladi. Shunda Banach fikslar nuqta teoremasiga ko'ra, tanlangan yopiq sharda yagona fikslar nuqta mavjud, ya'ni Koshi masalasining yagona yechimi mavjud bo'ladi. Bu natija lokal xarakterga ega, chunki T yetarlicha kichik tanlanganida $q < 1$ dan kichik bo'lishini ta'minlash doimo mumkin.

Natijaning mazmuni va amaliy talqini. Qisqaruvchanlik sharti kasr tartibli holatda ham klassik g'oyani takrorlaydi, lekin vaqt oraliqning ta'siri T emas, balki T^α ko'rinishida namoyon bo'ladi. Bu shuni bildiradiki, α kichik bo'lsa, xotira effekti kuchaygani sababli operatorning ta'siri boshqacha masshtabda baholanadi va qisqaruvchanlikka erishish uchun T ni yanada kichik tanlash talab qilinishi mumkin. Shu bilan birga, $\Gamma[1+\alpha]$ koeffitsienti ham q qiymatini yumshatadi. Amaliy modellashtirishda bu shartlar parametrlarga sezgir: masalan, f ning Lipschitz doimiysi katta bo'lsa, mavjudlik yagonalik intervali qisqaradi. Biroq aynan shuning o'zi ham foydali ma'lumot beradi, chunki modelda nolinearlik kuchli bo'lsa, yechimning global davom ettirilishi masalasi alohida tekshiruv talab qiladi.

Picard iteratsiyasi va konstruktiv yaqinlashuv. Banax teoremasining yana bir katta ustunligi shundaki, u faqat mavjudlik va yagonalikni emas, balki yechimni topishning iteratsion usulini ham beradi. Picard iteratsiyasi $y_0 t = y_0$, $y_{n+1} t = A y_n t$ formulasi bilan beriladi, ya'ni $y_{n+1} t = y_0 + I^\alpha f s$, $y_n s$. Qisqaruvchanlik sharti ostida bu ketma ketlik yagona fiks nuqtaga yaqinlashadi. Yaqinlashuv tezligi ham baholanadi: $\|y_n \text{ minus } y\| \leq q^n \|y_1 \text{ minus } y_0\| / 1 \text{ minus } q$. Bu baholash sonli usullar uchun nazariy asos bo'lib, ayniqsa kasr integral ko'rinishdagi diskretlashtirishlarda yaqinlashuvni tekshirishda ishlatiladi.

Yechimning boshlang'ich shartlarga bog'liqligi. Mavjudlik va yagonalik bilan birga, yechimning y_0 ga uzluksiz bog'liqligi ham kelib chiqadi. Agar y_0 va z_0 ikki xil boshlang'ich qiymat bo'lsa va mos yechimlar y hamda z bo'lsa, operator tenglama baholashlari orqali $\|y \text{ minus } z\|$ ning $|y_0 \text{ minus } z_0|$ ga proporsionalligi ko'rsatiladi. Bu natija amaliy jihatdan juda muhim, chunki boshlang'ich shartlar ko'pincha o'lchov yoki statistik baholashdan keladi. Agar kichik xato katta farqqa olib kelsa, model ishonchsiz bo'ladi. Banax teoremasi ostida esa yechimlar farqi boshqariladigan bo'ladi va bu modellashtirishda barqarorlik mezonini sifatida talqin qilinadi.

Shartlarni umumlashtirish. Natijani aniq mezon sifatida jamlaymiz: agar $f t$, y funksiya t bo'yicha uzluksiz, y bo'yicha lokal Lipschitz va ma'lum cheklangan sohada chegaralangan bo'lsa, u holda Koshi masalasining lokal yechimi mavjud. Agar qo'shimcha ravishda $L T^\alpha / \Gamma[1+\alpha] < 1$ bajarilsa, yechim yagona bo'ladi. Bu shartlar ko'plab amaliy modellar uchun tekshiriladigan va qulay shartlardir. Bundan tashqari, yechimning global mavjudligi masalasi odatda qo'shimcha baholashlar, o'sish shartlari va davom ettirish teoremlari bilan bog'liq bo'ladi, biroq lokal natija har bir model qurilishida birinchi zarur qadam hisoblanadi.

XULOSA VA MUNOZARA

Kasr tartibli differensial tenglamalarda Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi masalasi Banax fiks nuqta teoremasi yordamida aniq va samarali tarzda asoslanadi. Mazkur maqolada kasr hosilali tenglama kasr integral operatori orqali Volterra tipidagi integral tenglamaga ekvivalent o'tkazildi va masala uzluksiz

funksiyalar fazosida operatorning fiks nuqtasini topish ko‘rinishiga keltirildi. f funksiyaning uzluksizligi va y bo‘yicha Lipschitz sharti ostida operatorning qisqaruvchi tasvir ekani ko‘rsatildi, shuningdek qisqaruvchanlik sharti $L T^\alpha / \Gamma[1+\alpha] < 1$ ko‘rinishida aniq mezonga keltirildi. Ushbu mezon bajarilganda Koshi masalasining lokal yechimi mavjud bo‘lib, u yagona ekani kafolatlanadi.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. Podlubny I. Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 2019. 340 p.
2. Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 540 p.
3. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. Berlin: Springer, 2010. 247 p.
4. Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I. Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications. New York: Gordon and Breach, 2013. 1006 p.