

BOSH EGRILIKLAR VA GAUSS EGRILIGI ASOSIDA SIRTLARNI KLASSIFIKATSIYA QILISH

Voxidov Abduqodirxon Xabibxon o'g'li

Matematika yo'nalishi 1- kurs talabasi

Ilmiy maslahatchi: Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna

Matematika kafedrasida dotsenti

Namangan davlat universiteti, O'zbekiston

Annotatsiya: Mazkur maqolada differensial geometriyaning muhim tushunchalaridan biri bo'lgan bosh egriliklar va Gauss egriligi asosida sirtlarni klassifikatsiya qilish masalasi o'rganiladi. Tadqiqotda sirtlarning lokal geometrik xossalari bosh egriliklar orqali aniqlanib, Gauss egriligi yordamida ularning turli sinflarga ajratilishi tahlil qilinadi. Natijada sirtlarning elliptik, giperbolik va parabolik nuqtalarga ajralishi matematik jihatdan asoslab beriladi.

Kalit so'zlar: bosh egriliklar, Gauss egriligi, differensial geometriya, sirtlar, normal egrilik, klassifikatsiya

1. Introduction

Differensial geometriya sirtlarning lokal va global xossalarini o'rganadigan muhim matematik yo'nalishdir. Sirtning har bir nuqtasida uning egilish darajasi turlicha bo'lishi mumkin, bu esa egrilik tushunchasini kiritishni talab qiladi.

Sirtning egriligi normal kesimlar orqali aniqlanadi. Agar sirtning ma'lum bir nuqtasidan o'tuvchi tekislik sirtni kesib o'tsa, hosil bo'lgan chiziqning egriligi normal egrilik deb ataladi. Bu egriliklar orasida maksimum va minimum qiymatlar mavjud bo'lib, ular bosh egriliklar deyiladi.

Bosh egriliklar k_1, k_2 sirtning eng muhim lokal invariantlaridan biridir. Ular yordamida Gauss egriligi va o'rtacha egrilik aniqlanadi:

$$K = k_1 k_2, H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Gauss egriligi sirtning ichki xossasi bo'lib, u koordinata tanlashga bog'liq emas. Bu xususiyat Gaussning mashhur "Theorema Egregium" natijasida isbotlangan.

Mazkur maqolaning maqsadi - bosh egriliklar va Gauss egriligi asosida sirtlarning matematik klassifikatsiyasini kengaytirilgan ko'rinishda ishlab chiqishdir.

2. Methods

2.1. Sirtning parametrik berilishi

Sirt quyidagicha beriladi:

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Hosilalar:

$$\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$$

Normal vektor:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

2.2. Fundamental formalar

Birinchi fundamental forma:

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

bu yerda:

$$E = \langle r_u, r_u \rangle, F = \langle r_u, r_v \rangle, G = \langle r_v, r_v \rangle$$

Ikkinchi fundamental forma:

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

2.3. Normal egrilik

$$k_n = \frac{II}{I} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

2.4. Bosh egriliklar

Bosh egriliklar quyidagi tenglamadan topiladi:

$$\det \begin{pmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{pmatrix} = 0$$

Bu kvadratik tenglama:

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

2.5. Yangi teorema (Yangi klassifikatsiya kriteriyi): Agar sirtning har bir nuqtasida bosh egriliklar yig'indisi va ko'paytmasi quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

$$H^2 - K > 0$$

u holda sirtning shu nuqtasi giperbolik tipga mansub bo'ladi.

Isbot (qisqacha):

$$H^2 - K = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4} \geq 0$$

Agar k_1 va k_2 qarama-qarshi ishorali bo'lsa, sirt saddle tipda bo'ladi.

3. Results

Tadqiqot natijasida bosh egriliklar va Gauss egriligi yordamida sirtlarning lokal va global xossalarini aniqlash imkoniyati tizimli ravishda asoslab berildi. Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, sirtning har bir nuqtasida aniqlanadigan bosh egriliklar k_1 va k_2 uning egilish xususiyatlarini to'liq tavsiflaydi. Ushbu egriliklarning qiymatlari orqali sirtning qaysi tipga mansubligini aniqlash mumkin bo'ladi.

Avvalo, Gauss egriligi

$$K = k_1 k_2$$

asosiy klassifikatsiya kriteriyi sifatida qaraldi. Agar $K > 0$ bo'lsa, bu sirtning shu nuqtasida ikkala bosh egrilik bir xil ishoraga ega ekanligini bildiradi. Bu holatda sirt

qavariq yoki botiq bo‘lib, barcha normal kesimlar bir xil yo‘nalishda egiladi. Bunday nuqtalar elliptik nuqtalar deb ataladi va ular sfera yoki ellipsoid kabi sirtlarda uchraydi.

Agar $K < 0$ bo‘lsa, bosh egriliklar qarama-qarshi ishorali bo‘ladi, ya’ni sirt bir yo‘nalishda qavariq, boshqa yo‘nalishda esa botiq bo‘ladi. Bu holat giperbolik nuqtalarga mos keladi va sirt saddle (egilgan) shaklga ega bo‘ladi. Bunday sirtlarga giperbolik paraboloid yoki bir qatlamli giperboloid misol bo‘la oladi. Ushbu natija sirtlarning geometrik murakkabligini va ularning turli yo‘nalishlarda turlicha xatti-harakatini aniq ifodalaydi.

Agar $K = 0$ bo‘lsa, kamida bitta bosh egrilik nolga teng bo‘ladi. Bu holat parabolik nuqtalarni ifodalaydi. Bunday nuqtalarda sirt tekislikka yaqin xususiyatga ega bo‘lib, egilish faqat bitta yo‘nalishda mavjud bo‘ladi. Silindr sirtlari ushbu holatning klassik misoli hisoblanadi.

Natijalar shuni ko‘rsatdiki, Gauss egriligi orqali olingan klassifikatsiya sirtlarning lokal geometriyasini aniq va ishonchli tavsiflash imkonini beradi. Bundan tashqari, quyidagi formula orqali Gauss egriligi fundamental formalarga bog‘liq holda ifodalanishi ham isbotlandi:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

Bu formula sirtning ichki xossalarini ifodalab, uning parametrik berilishidan mustaqil ekanligini ko‘rsatadi.

Shuningdek, tadqiqot davomida o‘rtacha egrilik ham muhim rol o‘ynashi aniqlangan:

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Agar $H = 0$ bo‘lsa, bunday sirt minimal sirt deb ataladi. Natijalar shuni ko‘rsatdiki, minimal sirtlar fizik va geometrik modellashtirishda muvozanat holatlarini tavsiflashda muhim ahamiyatga ega.

Bosh egriliklar orqali sirtning maxsus nuqtalari ham aniqlandi. Xususan, agar $k_1 = k_2$ bo‘lsa, bunday nuqta umbilik nuqta deb ataladi. Bu nuqtalarda sirt barcha yo‘nalishlarda bir xil egiladi. Ushbu natija yuqori simmetriyaga ega sirtlarda, ayniqsa sferalarda kuzatiladi.

Natijalar umumlashtirilganda shuni ko‘rsatadiki, bosh egriliklar va Gauss egriligi yordamida sirtlarning klassifikatsiyasi yagona matematik model asosida amalga oshiriladi. Bu model nafaqat nazariy jihatdan mukammal, balki amaliy qo‘llanilishi mumkin bo‘lgan universal yondashuv hisoblanadi. Sirtlarning geometrik xossalarini aniqlashda ushbu yondashuv yuqori aniqlik va ishonchlikni ta’minlaydi hamda differensial geometriyaning asosiy masalalarini hal qilishda samarali vosita bo‘lib xizmat qiladi.

4. Discussion

Ushbu tadqiqot natijalari bosh egriliklar va Gauss egriligining sirtlarning lokal va global xossalarini aniqlashdagi fundamental rolini yana bir bor tasdiqlaydi. Olingan natijalardan ko‘rinadiki, Gauss egriligi sirtning ichki invariantlaridan biri bo‘lib, u sirtning egilish xususiyatlarini faqat uning ichki metrikasi orqali aniqlash imkonini beradi. Bu xususiyat differensial geometriyada muhim nazariy natija hisoblangan bo‘lib, u sirtni fazoda qanday joylashganidan qat’i nazar, uning egrilik xossalari o‘zgarmasligini bildiradi.

Bosh egriliklar yordamida sirtning har bir nuqtasida maksimal va minimal egilish yo‘nalishlari aniqlanadi. Bu yo‘nalishlar sirtning asosiy geometrik strukturasi haqida chuqur ma’lumot beradi. Xususan, agar $k_1 = k_2$ bo‘lsa, bu nuqta umbilik nuqta deb ataladi va bunday nuqtalarda sirt barcha yo‘nalishlarda bir xil egiladi. Bu hodisa sfera kabi yuqori simmetriyaga ega sirtlarda kuzatiladi. Aksincha, $k_1 \neq k_2$ bo‘lgan nuqtalarda sirt anisotrop xususiyatga ega bo‘lib, turli yo‘nalishlarda turlicha egiladi.

Gauss egriligi orqali olingan klassifikatsiya natijalari sirtlarning uch asosiy turga ajralishini ko‘rsatadi: elliptik, giperbolik va parabolik. Elliptik nuqtalarda sirt qavariq shaklga ega bo‘lib, barcha normal kesimlar bir xil yo‘nalishda egiladi. Giperbolik nuqtalarda esa sirt saddle (egilgan) shaklga ega bo‘lib, bu yerda egilish yo‘nalishlari qarama-qarshi bo‘ladi. Parabolik nuqtalar esa bu ikki holat orasidagi chegaraviy holatni ifodalaydi. Ushbu klassifikatsiya nafaqat matematik nazariyada, balki amaliy sohalarda ham muhim ahamiyatga ega.

Sirtlarning egrilik xossalari fizik jarayonlarni modellashtirishda ham keng qo‘llaniladi. Masalan, elastik sirtlarning deformatsiyasi, suyuqlik yuzalarining shakli, minimal sirtlar nazariyasi kabi masalalarda o‘rtacha egrilik H muhim rol o‘ynaydi. Agar $H = 0$ bo‘lsa, bunday sirt minimal sirt deb ataladi va u energiya minimumiga mos keladi. Bu esa fizikada muvozanat holatlarini tavsiflashda qo‘llaniladi.

Bundan tashqari, bosh egriliklar va Gauss egriligi kompyuter grafikasi va uch o‘lchamli modellashtirishda ham muhim vosita hisoblanadi. Grafik tizimlarda sirtlarning silliqliqi, yorug‘likning aks etishi va geometrik realizm aynan egrilik parametrlariga bog‘liq. Shu sababli sirtlarni matematik jihatdan to‘g‘ri tavsiflash zamonaviy texnologiyalar uchun ham dolzarb hisoblanadi.

Shuningdek, Gauss egriligining invariantligi sirtlarni izometrik o‘zgartirishlar orqali o‘rganishda muhim ahamiyatga ega. Masalan, tekislikni bukish orqali silindr hosil qilish mumkin, ammo bu jarayonda Gauss egriligi o‘zgarmaydi, ya’ni har ikkala sirtning $K = 0$ bo‘lib qoladi. Bu esa sirtlarning ichki geometriyasi ularning tashqi shakliga bog‘liq emasligini ko‘rsatadi.

Umuman olganda, olingan natijalar differensial geometriyada egrilik tushunchasining chuqur nazariy va amaliy ahamiyatga ega ekanligini ko‘rsatadi. Bosh egriliklar va Gauss egriligi yordamida sirtlarni tahlil qilish usuli soddaligi va

universalligi bilan ajralib turadi hamda turli fanlararo tadqiqotlarda qo'llanilishi mumkin.

5. Conclusion

Mazkur maqolada bosh egriliklar va Gauss egriligi asosida sirtlarni klassifikatsiya qilish masalasi keng va tizimli ravishda o'rganildi. Tadqiqot natijasida sirtlarning lokal xossalari bosh egriliklar orqali aniqlanishi, global klassifikatsiyasi esa Gauss egriligi yordamida amalga oshirilishi ilmiy asosda ko'rsatildi.

O'tkazilgan tahlillar shuni ko'rsatdiki, bosh egriliklar sirtning har bir nuqtasidagi maksimal va minimal egilishlarni aniqlab, uning lokal geometriyasini to'liq tavsiflaydi. Gauss egriligi esa ushbu qiymatlarning ko'paytmasi sifatida sirtning umumiy tipini aniqlash imkonini beradi. Shu asosda sirtlar elliptik, giperbolik va parabolik turlarga ajratildi.

Shuningdek, tadqiqot davomida bosh egriliklar va o'rtacha egrilik yordamida sirtlarning qo'shimcha xossalari ham aniqlandi. Xususan, minimal sirtlar nazariyasi, umbilik nuqtalar tushunchasi va izometrik o'zgarishlar natijasida egrilikning saqlanishi kabi muhim natijalar asoslab berildi.

Mazkur ishning muhim natijalaridan biri shundaki, sirtlarni klassifikatsiya qilish uchun taklif etilgan matematik yondashuv umumiy va universal xarakterga ega bo'lib, u turli geometrik obyektlarga tatbiq etilishi mumkin. Bu esa differensial geometriyaning boshqa bo'limlari bilan integratsiyalashuv imkoniyatini kengaytiradi.

Yakuniy xulosa sifatida aytish mumkinki, bosh egriliklar va Gauss egriligi sirtlarni o'rganishda eng muhim matematik vositalardan biri hisoblanadi. Ular yordamida nafaqat sirtlarning nazariy xossalari, balki ularning amaliy qo'llanilishi ham samarali tarzda tahlil qilinadi. Mazkur natijalar differensial geometriya, fizik modellashtirish, muhandislik va kompyuter grafikasi sohalarida keng qo'llanish imkoniyatiga ega.

Kelgusida ushbu yo'nalishda olib boriladigan tadqiqotlar sirtlarning murakkabroq modellarini, yuqori o'lchamli fazolardagi egrilik xossalari hamda ularning zamonaviy ilmiy va texnologik muammolardagi qo'llanilishini yanada chuqurroq o'rganishga xizmat qilishi mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Xolmatov A. M. Analitik geometriya nazariyasi va amaliyotida vektor metodlari. – Toshkent: TDPU nashriyoti, 2022.
2. Anton H. Elementary Linear Algebra. – 12th Edition. – New York: John Wiley & Sons, 2020. DOI: 10.1002/9781119611232
3. Lay D. C., Lay S. R., McDonald J. J. Linear Algebra and Its Applications. – Pearson, 2023. ISBN 978-0-13-751007-3.

4. Dilnoza, M. Use of the Acmeological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c-ISSN, 2792-4025.
5. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). NUQTADAN TO'G'RI CHIZIQQACHA BO'LGAN MASOFA. IKKI TO'G'RI CHIZIQ ORASIDAGI BURCHAK. B THEORETICAL ASPECTS IN THE FORMATION OF PEDAGOGICAL SCIENCES (T. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643>
6. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). TEKISLIKDA TO'G'RI CHIZIQ TENGLAMALARI VA ULARNI AMALIYOTGA TADBIFI. B THEORETICAL ASPECTS IN THE FORMATION OF PEDAGOGICAL SCIENCES (T. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
7. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). TEKISLIKDA TO'G'RI CHIZIQ TENGLAMALARI VA ULARNI AMALIYOTGA TADBIFI. B THEORETICAL ASPECTS IN THE FORMATION OF PEDAGOGICAL SCIENCES (T. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
8. Karimberdiyeva, D., & Mahmudova, D. (2025). TEKISLIKDAGI PERSPEKTIV-AFFIN MOSLIKNING O'ZIGA XOS XUSUSIYATLARI. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.