PARABOLIK TIPDAGI TENGLAMAGA KELADIGAN TABIIY JARAYONLAR.

Saidov Asqar Hayitnazarovich
Buxoro davlat texnika universiteti akademik litseyi
Matematika fani o'qituvchisi

Annotatsiya. Ushbu maqolada parabolik tipdagi tenglamaga keladigan tabiiy jarayonlar haqida qisqacha tushuncha berilgan.

Kalit so'zlar. Differensial tenglama, Xususiy hosilali differensial tenglama, Parabolik tipdagi tenglamalar, Issiqlik tarqalish tenglamasi.

Annotation. This article provides a brief description of the natural processes that lead to a parabolic equation.

Keywords. Differential equation, Differential equation with special derivatives, Parabolic equations, Heat transfer equation.

Differensial tenglamalar deb, noma'lumi bir yoki bir necha o'zgaruvchili funksiya va uning hosilalari bo'lgan tenglamalarga aytiladi. Agar tenglamada noma'lum funksiya ko'p o'zgaruvchining (o'zgaruvchi 2 tadan kam bo'lmasligi kerak) funksiyasi bo'lsa, bunday tenglama xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi. Matematik fizikaning ko'pchilik masalalari ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarga keltiriladi. Bu tenglamalar, bizning asosiy o'rganadigan mavzumiz bo'lgani uchun, bularni sinflarga ajratish, turlarini aniqlash, kanonik ko'rinishga keltirish bizning asosiy maqsadimiz hisoblanadi.

Ta'rif 1: x, y erkli o'zgaruvchining $u(x, y)$ noma'lum funksyasi va funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari orasidagi bog'lanishga, ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar deyiladi.

Ta'rif 2: E_2 fazoda ikkinchi tartibli xususiy hosilalari mavjud qandaydir $u(x, y)$ funksiya berilgan bo'lsin ($u_{xy} = u_{yx}$). U holda

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \qquad (1)$$

tenglama umumiy holda berilgan xususiy hosilali tenglama deyiladi. Bu yerda F - qandaydir funksiya.

Xuddi shunga o'xshash ko'p erkli o'zgaruvchili ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, u_{x1}, u_{x2}, ..., u_{xn}, ..., u_{xi\,xj}, ...) = 0 \qquad (2)$$

Ta'rif 3: Xususiy hosilali differensial tenglama yuqori tartibli hosilalarga nisbatan chiziqli deyiladi, agarda u yuqori tartibli hosilalarga nisbatan ushbu ko'rinishga ega bo'lsa:

$a_{11}(x, y)\cdot u_{xx} + 2a_{12}(x, y)\cdot u_{xy} + a_{11}(x, y)\cdot u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ (3)

Ta'rif 4: Quyidagi ko'rinishdagi tenglamalarga kvazichiziqli tenglamalar deyiladi:

$a_{11}(x, y, u, u_x, u_y)\cdot u_{xx} + 2a_{12}(x, y, u, u_x, u_y)\cdot u_{xy} + a_{11}(x, y, u, u_x, u_y)\cdot u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ (4)

Ta'rif 5: Tenglama chiziqli deyiladi, agarda u barcha xususiy hosilalarga va noma'lum funksiyaning o'ziga nisbatan ham chiziqli bo'lsa, ya'ni quyidagi ko'rinishga ega bo'lsa,

$a_{11}(x, y)\cdot u_{xx} + 2a_{12}(x, y)\cdot u_{xy} + a_{11}(x, y)\cdot u_{yy} + b_1(x, y)\cdot u_x + b_2(x, y)\cdot u_y + c(x, y)\cdot u + f(x, y) = 0$ (5)

Ushbu tenglamada $a_{11}(x, y)$, $a_{12}(x, y)$, $a_{11}(x, y)$, $b_1(x, y)$, $b_2(x, y)$, $c(x, y)$ - (5) tenglamaning koeffitsientlari, $f(x, y)$ - (5) tenglamaning ozod hadi deyiladi.

Ta'rif 6: Agar (5) tenglamada $f(x, y) = 0$ bo'lsa, u holda (5) tenglama bir jinsli tenglama deyiladi. Aks holda, agar $f(x, y) \neq 0$ bo'lsa, (5) tenglama bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama deyiladi.

Biror fizik jarayonni to'la o'rganish uchun, bu jarayonni tasvirlayotgan tenglamalardan tashqari, uning boshlang'ich holatini (boshlang'ich shartlarni) va jarayon sodir bo'ladigan sohaning chegarasidagi holatini (chegaraviy shartlarni) berish zarurdir. Matematik nuqtai nazardan bu narsa differensial tenglamalar yechimining yagona emasligi bilan bog'liqdir. Oddiy differensial tenglamalar kursidan ma'lumki,

n – tartibli $F(x, y, y', ..., y(n)) = 0$

tenglamaning yechimi n ta ixtiyoriy o'zgarmasga bog'liqdir, ya'ni $y = \varphi(x, c1, ..., cn)$. Bu o'zgarmaslarni aniqlash uchun noma'lum funksiya $y(x)$ qo'shimcha shartlarni qanoatlantirishi kerak. Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun bu masala murakkabroqdir. Bu tenglamalarning yechimi ixtiyoriy o'zgarmaslarga emas, balki ixtiyoriy funksiyalarga bog'liq bo'lib, bu funksiyalar soni tenglamalar tartibiga teng bo'ladi. Ixtiyoriy funksiyalar argumentlarining soni yechim argumentlari sonidan bitta kam bo'ladi.

Misol 1. Quyidagi tenglamaning umumiy yechimini toping: ***uxy=0.*** Dastlab x bo'yicha, so'ngra y bo'yicha integrallaymiz, natijada

$u(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$

yechimni olamiz. Ko'rib turganingizdek, xususiy hosilali differensial tenglamaning yechimida tenglama tartibiga teng miqdorda, ya'ni ikkita funksiya qatnashayapti, bu funksiyalar argumenti esa yechim argumentlari sonidan bitta kam.

Misol 2. Quyidagi tenglamaning ham umumiy yechimini topaylik: $\boldsymbol{u_{xyy}=0}$. Yuqoridagidek mulohaza yuritsak umumiy yechim:

$u(x, y) = f_1(x)\, y + f_2(x) + f_3(y)$.

Misol 3. Quyidagi tenglamaning ham umumiy yechimini topaylik:

$u_{xyz}=0.$

Yuqoridagidek mulohaza yuritsak umumiy yechim:

$u(x, y, z) = x \cdot y \cdot f_1(x, y) + x \cdot f_2 (x, z) + f_3 (y, z)$

Oxirgi misolda, ko'rib turganingizdek yechimda tenglama tartibiga mos uchta funksiya qatnashayapti, yechim uch o'zgaruvchili bo'lgani uchun bu funksiyalar argumenti ikki o'zgaruvchili. Shunday qilib, aniq fizik jarayonni ifodolovchi yechimni ajratib olish uchun qo'shimcha shartlarni berish zarurdir. Bunday qo'shimcha shartlar boshlang'ich va chegaraviy shartlardan iboratdir. Barcha nuqtalarida tenglama bir xil tipga tegishli bo'lgan G sohani qaraymiz. G sohaning har bir nuqtasidan ikkita xarakteristika o'tadi, aynan, giperbolik tipdagi tenglamalar uchun ikkita haqiqiy va o'zaro farqli xarakteristikalar elliptik tenglamalar uchun esa ikkita kompleks va o'zaro farqli xarakteristikalar, parabolik turdagi tenglamar uchun esa, ikkita haqiqiy va o'zaro ustma-ust tushadigan xarakteristikalar o'tadi.

Parabolik tipdagi tenglamaga keladigan ba'zi bir tabiiy jarayonlar

Matematik modellar universallik xarakteriga ega. Parabolik tipdagi tenglamalar – matematik model universalligiga bitta misol. Ular turli tabiatdagi jarayonlarni ifodalaydi. Shuni ta'kidlashimiz lozimki, parabolik tenglamalar tartibsiz xaotik jarayonlar bilan bog'liq (Issiqlik tarqalishi,diffuziya…). Ammo ular ko'pgina tartiblangan jarayonlarga ham qo'llaniladi (yer osti suvlarining harakati, gazni filtirlash…). Matematik modellarning universalligi bizni o'rab turgan olam birligini anglatadi. Shu sababli ba'zi bir hodisalarning matematik modellari umuman boshqa turdagi jarayonga ham qo'llaniladi.

Parabolik tenglamalar.

Obyekt(jarayon)	Asosiy farazlar va qonunlar
Yer osti suvlarining harakati	Massaning saqlanishi, Darsiy qonuni
Issiqlik tarqalishi, diffuziya hodisasi	Energiyaning saqlanishi, Fur'ye qonuni, massaning saqlanishi, Fuk qonuni
Amyobalarning to'planishi	Energiyaning saqlanishi, Fur'ye qonuni, massaning saqlanishi, Fuk qonuni
Tasodifiy Markov jarayoni	Markov ayniyati, jarayonning kuchli uzluksizligi
Iyerarxiya hokimiyatining taqsimlanish dinamikasi	Qonunga bo'ysunuvchanlik, iyerarxiyada hokimiyatning qayta taqsimlanish mexanizmi postulatlari.

Quyida ba'zi bir parabolik tipdagi tenglamaga keladigan tabiiy jarayonlarni ko'rib chiqamiz:

Issiqlik tarqalish tenglamasi.

Ko‘ndalang kesim o‘lchamlari uzunlik o‘lchamiga nisbatan juda kichik bulgan ingichka to‘g‘ri brus sterjen deb ataladi. Sterjen silindrik yoki prizmatik formada bo‘lib, ko‘ndalang kesim yuzi hamma joydi bir xil. Faraz qilaylik, bir jinsli, temperaturasi vaqt o‘tishi bilan o‘zgaradigan metal sterjen berilgan bo‘lib, uning yon sirti va uchlari tashki muxit bilan issiqlik almashmaydigan bo‘lsin. Agar sterjen boshlag‘ich holatda notekis isitilgan bo‘lsa, issiqlik tarqalish hodisasiga ko‘ra uning ko‘prok isigan qismidan kamrok isigan qismiga issiqlik tarkaladi va vaqt o‘tishi bilan uning hamma joyida temperatura bir xil bo‘ladi.

Agar x o’qni sterjen o’qi bo’ylab yo’naltirsak, u holda u temperatura x koordinata va t vaqtning funksiyasi bo‘ladi, ya’ni $u = u(x, t)$. O‘zgarmas t uchun $u(x, t)$ sterjenning ixtiyoriy x koordinataga mos ko‘ndalang kesimidagi nuqtaning shu paytdagi temperaturasini aniqlaymiz.

Agar x ni o‘zgarmas deb qaralsa, $u(x, t)$ funksiya sterjenning x ga mos kelgan ko‘ndalang kesimida vaqt o‘tishi bilan temperaturaning o‘zgarish qonunini ifodalaydi.
Endi faraz qilamiz, sterjen issiqlik manbaalariga ham ega bo‘lsin, ya’ni serjen ichida issiqlik paydo bo‘lishi yoki isrof bo‘lishi mumkin bo‘lsin. Sterjenda issiqlikning paydo bo‘lishini (yoki isrof bo‘lishini) issiqlik manbalarining zichligi yordamida xarakterlash qulay. Issiqlik manbalarining zichligi deb shunday $F(x,t)$ funksiyaga aytiladiki, bunda sterjenning $(x,x+dx)$ kichik uchastkasida vaqtning $(t,t+dt)$ oralig‘ida $F(x,t)dxdt$ issiqlik miqdori paydo bo‘ladi. (Agar $F(x,t) <0$ bo‘lsa, issiqlik miqdori isrof bo‘ladi.)

Qaralayotgan hol uchun issiqlik balansi tenglamasini tuzaylik. Bunda sterjenning qaralayotgan uchastkasida issiqlikning paydo bo‘lishini hisobga olamiz. Bu holda sterjenning $(x, x+dx)$ qismida issiqlik manbalarining ta’sirida vaqtning $(t, t+dt)$ oralig‘ida

$dQ = SF(x,t)dxdt$ issiqlik miqdori paydo bo‘ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Годунов С.К., Роменский Е.И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения Новосибирск: «Научная книга». 1998. стр 267-269.
2. Годунов С.К. г., ст.Элементы механики сплошной среды. М., «Наука», 1978 243-262.
3. Colella, E.G. Puckett Modern Numerical Method for Fluid Flow. Internet resources, E-mail: egpuckett@ucdavis.edu
4. Самарский А. А. Теория разностных схем: Учебное пособие. – 2-е изд. – М.: Наука, 1983. стр 567-586.
5.Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – 6-е изд. – М.: Наука, 1999. стр 129-236.

6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. Стр 420-437.
7. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1984. стр 233-245. 13.Боровков А.А. Математическая статистика. М.: Наука, 1984. стр 255-258.