DIFFERENSIAL TENLAMALAR NAZARIYASI VA ULARNING BA'ZI TATBIQLARINI O'RGANISH.

Saidov Asqar Hayitnazarovich
Buxoro davlat texnika universiteti akademik litseyi
Matematika fani o'qituvchisi

Annotatsiya. Ushbu maqolada differensial tenglamalar nazariyasi tarixi va differensial tenglamalar bilan bog'liq eng asosiy tushunchalar keltirib o'tilgan.

Kalit so'zlar. Differensial tenglama, Koshi masalasi, hosilaga nisbatan yechilmagan tenglamalar.

Annotation. The article presents the history of the theory of differential equations and the most basic concepts associated with differential equations.

Keywords. Differential equation, Cauchy problem, equations unresolved with respect to the derivative.

Differensial tenglamalar nazariyasiga oid masalalar dastlab XVI-XVII asrda hisoblash matematikasiga oid ishlarda uchraydi. J.Neper (1550-1617) logarifmik jadvallarni yaratishda bunday tenglamalarga duch kelgan.

M nuqta *O* nuqtadan chiqib, *V* o'zgarmas tezlik bilan harakat qiladi; *N* nuqta *V* tezlik bilan *A* nuqtadan chiqib $AV = 10^7$ kesmada *NB* masofaga proportsional tezlik bilan *B* ga qarab harakatlanadi. *OM* kesmaning uzunligi *NB* kesmaning niper logarifmi bo'ladi.

$OM = y$ va $NB = x$ desak bu nuqtalarning tezligi

$$\frac{dy}{dt} = V, \frac{dx}{dt} = -\frac{Vx}{10^7}$$

x va Neper logarifmi $y=Lx$ o'rtasidagi bog'lanish

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{10^7}{x}\ ;\ x_0 = 10^7, y_0 = 0$$ bo'ladi.

Matematik bilish sohasida differensial tenglamalar keltiriladigan masalalarning dastlabkisi 1638 yilda G.Galiley (1564-1642) tomonidan e'lon qilingan jismning qarshiliksiz muhitda tushishi muammosi va 1628 yilda R.Dekart (1596-1650) tomonidan e'lon tomonidan e'lon qilingan yorug'likning sinish qonunida "urinmaga teskari masala" bo'lib hisoblanadi.

I.Nyuton (1642-1727) va G.V.Leybnits (1646-1716) larning ishlaridan boshlab differentsial tenglamalarning tarixining birinchi davri boshlanadi. Nuqtaning va qattiq jismning dinamikasi masalalarini o'rganish, shuningdek ba'zi geometrik masalalarga differentsial va integral hisobning qo'llanilishi birinchi va ikkinchi tartibli oddiy tenglamalarni guruhlarga ajratdi.

XVIII asrning birinchi yarmida differensial tenglamalar nafaqat mexanikada balki differensial geometriya va variatsion hisobda ham kuchli qurol bo'ldi. XVIII asrning ikkinchi yarmida matematik fizika masalalari, xususan, torning tebranish masalasi xususiy hosilali differentsial tenglamalarning paydo bo'lishini va bular sirtlar nazariyasida keng qo'llanilishiga olib keldi.

Qator differensial tenglamalar Nyuton tomonidan "Natural falsafaning matematik boshlang'ichlari" («Matematicheskie nachalo' naturalnoy filosofii») (1686) asarida integrallangan "matematik boshlang'ichlarda" differensial tenglamalar va ularning integrallarini analitik shaklda yozilmagan, ular sintatik- geometrik chizmalar yordamida bayon qilingan. Mexanika masalalarining analitik shaklini birinchi bo'lib L.Eyler keltirgan. Differensial tenglamalar oshkor ko'rinishda Nyutonning 1671 yilda yozilgan va 1736 yilda e'lon qilingan "Flyuktsiyalar usuli va cheksiz qatorlar" asarida uchraydi.

"Differentsial tenglama" terminini Leybnits kiritgan. Uning izdoshlari Yakov Bermulli (1654-1705) va Ivan Bernulli (1667-1748) differensial tenglamalarni echish uchun qatorlarga yoyishni qo'lladilar.

Ya.Bernulli bir o'zgaruvchini o'z ichiga olmagan ikkinchi tartibli tenglamaning tartibini pasaytirish uchun $y'=p$ parametrlar kiritishni qo'llagan.

Differensial tenglamalar nazariyasining keyingi rivojiga Peterburg Akademiyasi akademigi L.Eyler (1707-1783), fransuz matematiklari A.Klero (1713-1765), Sh.Dalamber (1717-1783)va Sh.L.Lagranj (1736-1813) katta hissa qo'shdilar.

Eyler chiziqli bir jinsli tenglamani yechish uchun $y=e^{kx}$ almashtirish kiritdi. Dalamber chiziqli bir chiziqlimas tenglamaning umumiy echimi uning xususiy echimi bilan mos chiziqli bir jinsli tenglama umumiy echimi yig'indisiga tengligini ko'rsatdi. Lagrangi o'zgarmasli variatsiyalash usulini ishlab chiqdi. Lagrafgi chiziqli bir jinsli tenglamaning r ta xususiy yechimi ma'lum bo'lsa, uning tartibli r tagacha pasaytirish mumkinligini isbotlaydi. Eyler va Klero integrallovchi ko'paytuvchi kiritishni taklif qilishdi va $Mdx+Ndx$ tenglamaning integrallanish shartini kiritdi.

Maxsus yechimlarni birinchi marta B.Teylor (1685-1731) 1715 yilda uchratgan. 1736 yilda A.Klero Maxsus va umumiy yechimlarni ajratgan.

XIX asrning boshida limit, cheksiz kichik miqdor, induktsiya uzluksizligi, differensial, aniq integral kabi tushunchalarga aniq matematik ta'rif berildi va matematikada reforma qilishdi. Bu deformaning boshida O.Koshi (1788-1857), K.Gauss (1777-1855)va chex olimi B.Boltsiao (1781-1848) turdi.

1820-1830 yillarda Koshi $y'=f(x,y)$ tenglamaning $x=x_0$, $y=y_0$ boshlang'ich shartlarda echimi mavjudligi va yagonaligi shartini isbotladi. Yechimning mavjudligi va yagonaligi F.Muan'o (1804-1884), R.Linshiu (1832-1903) tomonidan to'liq isbotlandi. Dsh. Peamo (1858-1932) $y'=f(x,y)$ tenglamaning $x=x_0$, $y=y_0$ boshlang'ich shartlarda $f(x,y)$ uzluksiz bo'lganda hech bo'lmaganda bitta yechimi mavjudligini isbotladi. 1880 yilda E Pikar (1856-1941) ketma-ket yaqinlashishlar usulini ishlab chiqdi.

Xususiy hosilali tenglamalar sistemasi yechimi mavjudligini muammosi S.V.Kovalevskaya (1850-1891) tomonidan o'rganilgan.

Yangi matematik analizlarning yangi mukammal vositalari yordamida maxsus yechimlar muammosi bilan Muan'o, A.Kurno (1801-1874), maxsus yechimlarning zamonaviy nazariyasi G.Dorou (1842-1917; 1870), Pikar (1886-1887), G.Kristal (1851-1911; 1896) va boshqalar tomonidan ishlab chiqilgan.

Differensial tenglamalarning kvadraturada integrallash masalasi bilan Litsvill (1809-1882), D.Bernulli, P.L.Chevishev, V.P.Maksimovich, D.D.Morduxay-Boltovskaya va boshqa olimlar shug'ullangan.

Xususiy hosilali tenglamalar nazariyasi bilan I.F.(1765-1825) shug'ullanib, bir qancha yutuqlarga erishgan. U 1814 yilda chiziqli tenglama $F_1dx_1+F_2dx_2+\dots+F_ndx_n=0$, bunda $F_1,F_2,\dots F_n$ - n o'zgaruvchidan bog'liq funksiya, eng kam amal bajarib integrallash masalasini qo'ydi. Bu masalani "muammosi" deb atadi. Bu masala bilan E.Gursa (1858-1936) muvofaqqiyatli shug'ullanadi. Mexanikada Yakovi tomonidan ishlab chiqilgan ko'p o'zgaruvchili ikkinchi tartibli chiziqlimas tenglamani integrallash usullari katta ahamiyatga ega bo'ldi.

Yuqori tartibli xususiy hosilali tenglamalar nazariyasi matematik fizika va qayishqoqlik nazariyasi masalalari bilan uzviy bog'langan holda rivojlandi va trigonometrik qatorlar nazariyasi, kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, variatsion hisob apparati keng tadbiq qilindi. Shunday qilib, XIX asrning birinchi yarmi turli chegaraviy masalalarni yechishda muhim yutuqlar keltirdi. J.B.Furening (1768-1830) issiqlik o'tkazuvchanlik nazariyasidagi klassik ishlari ko'plab tadqiqotlar uchun tayanch punkti bo'lib qoldi.

XIX asr oxiri va XX asr boshida oddiy differentsial tenglamalar nazariyasida ikkita yo'nalish muhim o'rin tutadi. Ularning biri guruhlar nazariyasi tushunchasining tarqalishi bilan bog'liq, ikkinchi yo'nalish esa koinot mexanikasi va astronomiya masalalarini o'rganish bilan bog'liq.

Guruhlar nazariyasi g'oyasi dastlab o'zini algebrada oqlagan bo'lsa, keyinchalik matematikaning boshqa sohalariga ham tadbiq qilina boshladi.

XIX asrning 70-yillaridan boshlab differensial tenglamalarning sifat nazariyasi tadqiq qilish boshlandi. Differensial tenglamalarning sifat nazariyasi A.Puankare va A.M. Lyakunov tomonidan yaratildi. A. Puankare tenglamani integrallamasdan uning integral chiziqlari qanday joylashishini tadqiq qilish masalasini qo'ydi. Lyakunov chekli sondagi parametrlardan bog'liq mexanik sistemalarning harakati va muvozanati turg'unligi masalasini qo'ydi va bir necha ishlarini shu sohaga bag'ishladi.

XX asrning boshidan boshlab differensial tenglamalarni sonli integratsiyasi usullari paydo bo'ldi va bu sohadagi ishlar, yangi usullari va bu usullarning echimiga yaqinlashishi masalalari hozirgi paytda ham davom etmoqda.

Biz birinchi tartibli hosilaga nisbatan yechilmagan oddiy differensial tenglamalarni oddiy differensial tenglamalarni ko'ramiz:

$$F(x,y,y')=0 \qquad \textbf{(1`)}$$

Bunda x-erkli o'zgaruvchi, y-uning nomalum funksiyasi , $y' = \frac{dy}{dx}$ esa noma'lum funksiyasining hosilasi.

(1`) tenglamaning muhim xususiy hosilaga to'xtalamiz.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \textbf{(1)}$$

bu tenglamaga hosilaga nisbatan yechilgan oddiy differensial tenglama deyiladi. (1)tenglama (1`) tenglamani y` ga nisbatan yechish natijasida hosil bo'lgan deb qaramasdan, balki (1) ga *f(x,y)* funksiya Γ sohada berilgan deb qaraymiz.

Izoh 1. Soha deyilgan faqat yopiq yoki faqat ochiq bog'langan to'plamni olamiz. Agar berilgan Γ to'plamning ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi va shu to'plamga tegishli biror chiziq mavjud bo'lsa,u holda Γ to'plam bog'langan bo'ladi.

Izoh 2. Agar I intervalda yopiq bo'lsa u holda uning chap uchiga o'ng hosila, o'ng uchiga esa chap hosila nazarda tutiladi.

Tarif 1. (1) chi tenglama berilgan bo'lib, undaf(x,y) funktsiya R^2 tekislikning Γ sohasida aniqlangan bo'lsin. Agar I (ochiq,yopiq yoki yarim ochiq) intervalda aniqlangan $\varphi(x)$ funksiya uchun quyidagi uch shart

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ \ (\mathrm{x},\ \varphi(\mathrm{x})) \in \Gamma, \Gamma \subset R^2, x \in I \\ 2^\circ \ \varphi(\mathrm{x}) \in C^1(I) \\ 3^\circ \ \dfrac{\alpha\varphi(\mathrm{x})}{\alpha x} = f(x,\varphi(x)), x \in I \end{array}\right\} \qquad \textbf{(2)}$$

bajarilsa, u holda bu funksiya I intervalda (1) diferensial tenglamaning yechimi deyiladi. (1) differensial tenglamaning har bir $y = \varphi(x)$ yechimga mos kelgan egri chiziq (ya'ni $y = \varphi(x)$ funksiyaning grafigi) shu tenglamaning integral egri chizig'i deyiladi. (1) tenglamaning yechimi ba'zi hollarda oshkormas F(x,y)=0 ko'rinishda bo;lsa , ba'zi hollarda parametrik $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ t_\circ < t < t_1\ \ x'(t) \neq 0$ ko'rinishda bo'lishi mumkin.

Koshi masalasini qo'yilishi.

(1) tenglama berilgan bo'lib unda *f(x,y)* funksiya R^2 tekislikning Γ sohasida aniqlangan, uzluksiz va I interval x o'qidagi interval bo'lsin, x_0 ni o'z ichiga oladigan I intervalni va shu I intervalda aniqlangan uzluksiz differensiallanuvchi hamda ushbu

`

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ \ (\mathrm{x},\ \varphi(\mathrm{x})) \in \Gamma, \qquad x \in I \\ 2^\circ \ \varphi'(\mathrm{x}) = f(x,\varphi(x)) \qquad (\in I) \\ 3^\circ \ \varphi(x_\circ) = y_\circ ,\ (x_\circ, y_\circ) \in \Gamma \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3)}$$

Shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x)$ funksiyani topish talab etiladi.

Bu masala qisqacha $y' = f(x,y),\ \ y(x_\circ) = y_\circ$ kabi yoziladi va (1) tenglama uchun Koshi masalasi (yoki boshlang'ich masala) deyiladi.

(3)-shartni qanoatlantiruvchi $y=\varphi(x)$ funksiya I intervalda (k) Koshi masalasini yechimi deyiladi. Endi Γ sohaning (k) masala yagona yechimga ega bo'ladigan (x,y) nuqtalaridan tuzilgan kesmini $D_2^* \subset \Gamma$ $(D_2 \equiv \Gamma)$ deb belgilaylik. Shunga ko'ra D_2^* to'plamning har bir (x,y) nuqtasida (1) tenglamaning yagona integral chizig'i o'tadi.

Tarif 2. (1) differensial tenglama x,c o'zgaruvchilarning biror o'zgarish sohasida aniqlangan hamda x bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi

$$y=\varphi(x,c) \qquad \textbf{(4)}$$

funksiya berilgan bo'lsin. Agar $\forall\ (x,y)\in D_2^*$ nuqta uchun (4) munosabat c ning $c=\psi(x,y)$ (4`) qiymatini bir qiymatli aniqlasa va bu qiymatni ushbu $\frac{dy}{dx}=\varphi_x^{`}(x,c)$ (4``) tenglikka qo'yish natijasida (1) tenglama hosil bo'lsa, u holda (4) funksiya (1) tenglamaning D_2 to'plamda aniqlangan umumiy yechimi deyiladi.

Tarif 3. (1) tenglama va (4) chiziqlar oilasi berilgan bo'lsin. Agar

1) *f(x,c)* funksiya I intervalda x bo'yicha uzluksiz hosilaga ega bo'lsa;

2) Har bir $(x,y)\in D_2^*$ nuqta uchun (4) munosabat c ning (4`) qiymatini bir qiymatli aniqlasa;

3) $y=\varphi(x,\psi(x,y))$ funksiya (1) tenglamaning yechimi bo'lsa, uholda (4) funksiya (1) tenglamaning umumiy yechimi deyiladi.

Har bir natijasida Koshi masalasi yagona yechimga ega bo'ladigan yechim xususiy yechim deyiladi, (1) tenglamaning barcha yechimlarini topish asosiy masala hisoblanadi. Barcha yechimlarini topish jarayoni differensial tenglamani integrallash deyiladi. Agar (1) tenglamaning yechimini elementar funksiyalar va ularning integrallari yordamida yozish mumkin bo'lsa, u holda differensial tenglama kvadraturalarda integrallanadi deyiladi.

$D = {D_2}/{D_2^*}$ to'plamning har bir (x,y) nuqtasidan o'tadigan integral chiziqlar yagona emasligi kelib chiqadi. Har bir nuqtasidan yechimning yagonaligi buziladigan yechimlar maxsus yechimlar deyiladi. Umumiy yechish formulasi (4) maxsus yechimlarni o'z ichiga olmaydi. Agar Φ(x,y,c)=0 munosabat D_2^* to'plamda $y=\varphi(x,c)$ umumiy yechimni aniqlasa, u holda (4```) ni (1) differensial tenglamaning umumiy integrali deyiladi.

Masalan ; $y=ce^x$ chiziqlar oilasi berilgan bo'lsin. U holda $y'=ce^x$ izlangan differensial tenglama y`=y bo'ladi. Ravshanki, bu tenglamaning umumiy yechimi; $y=ce^x$

Agar umumiy yechim ma'lum bo'lmasa, Koshi masalasini yechish qiyinlashadi. Bunda differensiyal tenglama taqribiy integrallash metotlari yordamida yechiladi.

Hosilaga nisbatan yechilmagan tenglamalar.

Hosilaga nisbatan yechilmagan 1- tartibli oddiy differensial tenglamalar ushbu

$$F(x,y,y')=0 \qquad \textbf{(5)}$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerda F uch nargumentli funksiya bo'lib, uch o'lchovli fazoning ochiq D_3 to'plamida (D_3 sohaga) aniqlangan. Agar bu to'plamni R^2 tekisligiga ortogonal proeksiyalasak, R^2 ga biror ochiq Γ to'plam (Γ soha) hosil bo'ladi.

Tarif 4. (5) differensial tenglama berilgan bo'lib, $F(x, y, y') = 0$ funksiya R^3 fazoning D_3 sohasida aniqlangan bo'lsin.

Agar I (ochiq,yopiq va yoki yarim ochiq) intervalda aniqlangan (x) funksiya uchun quyidagi uchta shart

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ \ (x, \varphi(x)) \in \Gamma, x \in I, (x, \varphi(x)), \varphi^`(x) \in D_3, \Gamma \subset R^2 \ D_3 \subset R^3 \\ 2^\circ \ \varphi(x) \in C^1(I) \\ 3^\circ \ F(x, \varphi(x)), \ \varphi^`(x) \equiv 0, x \in I \end{array}\right\}$$

bajarilsa, bu funksiya I intervalda (5) differensial tenglamaning yechimi deyiladi. (5) tenglamaning yechimiga mos egri chiziq, uning integral egri chizig'i deyiladi.

Agar parametrik ko'rinishda berilgan $x = x(t), \ y = y(t), \ t \in I_t$ (I_t parametr t ning o'zgarish sohasi yopiq ochiq, yarim ochiq intervaldan iborat) funksiya uchun $x'(t) \neq 0, \ t \in I_t$ bo'lib, quyidagi uchta shart

$$1^\circ \ (x(t), y(t)) \in \Gamma, \ (x(t), y(t)), \ \frac{y'(t)}{x(t)} \in D_3, \quad t \in I_t$$

$$2^\circ \ y(t) \in C^1(I_t), \ (x(t) \in C^1(I_t));$$

$$3^\circ \ F\left(x(t), y(t), \ \frac{y^`(t)}{x^`(t)}\right) \equiv 0, \ t \in I_t$$

bajarilsa u holda *x=x(t), y=y(t)* funksiya I_t intervalda (5) differensial tenglamaning yechimi deyiladi. Ba'zi hollarda yechimni shu ko'rinishida yozish yoki izlash qulay bo'ladi.

(5) differensial tenglama uchun ham (1) differensial tenglama uchun aytilganidek yechim uch: $x = x(t), \ y = y(t), \ (t \in I_t); y = f(x); \ \Phi(x, y) = 0$ ko'rinishdan bittasi orqali izlanadi.

(5) differensial tenglama ochiq Γ to'plamning har bir (x,y) nuqtasida y` ning bitta yoki bir necha qiymatlarini aniqlasin deylik. Har bir (x,y) nuqtada y` dan foydalanib, bitta yoki bir necha birlik vektor chizamiz. Natijada yo'nalishlar maydoni hosil bo'ladi.

Umumiy yechim tushunchasini kiritishdan avval (5) tenglama uchun Koshi masalasini qo'llaymiz.

Differensial tenglamalar tuzishni talab etadigan geometrik va fizikaviy masalalarni yechish ko`pincha qiyinchiliklar tug`diradi: konkret fizikaviy masalalarning spetsifikasi turli fizikaviy qonunlarni bilishi talab etadi. Differensial tenglamalarni tuzishning barcha hollar uchun yarokli bo`lgan universal usulini ko`rsatish mumkin emas; faqat ba`zi bir umumiy ko`rsatmalar berish mumkin xolos.

Geometrik yoki fizikaviy masalalar shartlariga qarab birinchi tartibli differensial tenglamalar tuzishda ko`pincha tenglamalarning quyidagi uch ko`rinishidan biriga kelinadi:

1) differensiallar ishtirok etgan differensial tenglamalar ;

2) hosilalar ishtirok etgan differentsial tenglamalar;

3) keyinchalik differentsial tenglamalarga almashtiriladigan eng sodda integral tenglamalar;

bunday ko`rinishdagi tenglamalar qanday tuzilishini ayrimg`ayrim ko`rib chiqamiz.

Birinchi tartibli differensial tenglamalar tuzishda ko`pincha *differensial usuli* deb ataladigan usuldan foydalanish maqsadga muvofiq bo`ladi. Bu usul shundan iboratki, masala shartidan taqribiy yo`l bilan differensiallar orasida munosabatlar tuziladi. Bunda masalani soddalashtiruvchi va natijalarga ta`sir qilmaydigan yo`l qo`yishlarga ruxsat etiladigan. Jumladan, kattaliklaring kichik orttirmalari ularning differensiallari bilan almashtiriladigan, notekis o`tadigan fizikaviy jarayonlar (nuqtaning notekis harakati, jismning qizishi yoki sovushi, idishdan suvning oqishi va h. k.) kichik vaqt oralig`ida tekis, o`zgarmas tezlik bilan yuz beradigan jarayonlar sifatida qaraladi . Orttirmalar differensiallar bilan almashtirish kichikligi eng yuqori bo`lgan cheksiz kichik miqdorlarin tashlab yuborishga keltirilganligi uchun bunday yo`l qo`yishlar oxirgi natijaning to`g`riligiga ta`sir etmaydi. Funksiyaning va uning argumenti differensiallarining nisbati ularing orttirmalari nisbatlarning limiti bo`lganligi sababli, orttirmalar nolga intiladi borgan sari bizning yo`l ko`ygan farazlarimiz katta aniqlik bilan bajariladi. Agar bunda hosil bo`ladigan differensial tenglamalar differensiallarga nisbatan *bir jinsli va chiziqli* bo`lsa, bu tenglamalar aniq bo`ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Пономаров К.К ‘’Составление дифференциалных уравнение ‘’

3. Камке.’’Справочник по дифференциальным уравниниям’’

4. Филипов А. Ф. ‘’Сборник задач по дифференциальным уравниниям ’’

5. Степанов В.В. ‘’Курс дифференциалных уравнение ’’ М 1954й.