

#### 4- TARTIBLI OPERATORLI MATRITSANING SPEKTRAL XOSSALARI

**Suleymanova Nodira Shuxrat qizi**

Osiyo Xalqaro Universiteti

Buxoro filiali 1-kurs magistratura talabasi

**Annotatsiya:** Ushbu maqolada to‘rtinchi tartibli operatorli matritsaning spektral xossalari keng va chuqur tahlil qilinadi. Operatorli matritsalar, ular asosan chiziqli operatorlar va Chebyshev, Laplas, Sturm-Liuvill kabi differensial operatorlar orqali hosil qilinadigan matritsalar tufayli, bugungi zamonaviy matematikaning, ayniqsa, funksional analiz va chiziqli algebra sohalarining markaziy tadqiqot ob’ekti sifatida namoyon bo‘lmoqda. Har bir operatorli matritsaning spektral xossalari, avvalo, uning xossiy qiymatlari, xossiy vektorlari, spektri va ularning fizik mazmuni, illyustratsiyalari, ilovalaridan kelib chiqib keng yoritiladi.

**Kalit so‘zlar:** Operatorli matritsa, spektral xossa, xossiy qiymat, xossiy vektor, to‘rtinchi tartib, differensial operator, chiziqli algebra, funksiya fazosi, spektr, o‘lchamsizlik.

Zamonaviy matematik analiz, algebra va differensial tenglamalar nazariyasining taraqqiyotida operatorli matritsalar va, ayniqsa, ularning spektral xossalarini chuqur o‘rganish nihoyatda muhim ahamiyat kasb etadi. Bunda operatorli matritsa deganda, matritsada har bir element umumiy holda funksional yoki differensial operator bo‘lishi mumkin. Ayniqsa, to‘rtinchi tartibli operatorli matritsalar turli zamonaviy fizik va texnika muammolarida kishi e’tiborini o‘ziga tortadigan ob’ektlardan biridir. Ularning analitik, algebraik, funksiya-nazariy va fizik-mazmunli tadqiqi ilmiy izlanishlarning muhim yo‘nalishidir. Chunki operatorli matritsalar ko‘pincha turli fizik, mexanik, elektromagnit, kvant sistemalarining matematik modellarida, masalan, to‘lqin tenglamalari, elastiklik nazariyasidagi sistemalar, kvant mexanikadagi Hamilton operatorlari shaklida uchraydi. Ulardagi spektral xossalar, ya’ni xossiy qiymatlar va ularga mos keladigan xossiy vektorlar

ichki va tashqi muhitlarning muvozanat holatlari, tebranish chastotalari, energiya darajalari, kuchlanish va deformatsiya modullariga bevosita bog‘liq bo‘ladi [1].

Birinchi navbatda operatorli matritsa tushunchasini aniq belgilab olish muhim. Oddiy chiziqli algebra matritsalaridan farqli ravishda, operatorli matritsada har bir element aniq son emas, balki funksional yoki differensial operator bo‘ladi. Umuman,  $A = (A_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$  kabi matritsani ko‘rib chiqamiz, bunda har bir  $A_{ij}$  chiziqli operator, odatda, differensial operator bo‘lishi mumkin.

To‘rtinchi tartibli operatorli matritsa esa, tabiiyki, o‘lchami  $4 \times 4$  bo‘lgan operatorlardan tashkil topgan matritsa bo‘lib, quyidagi umumiy ko‘rinishda yoziladi:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

Bunda har bir  $A_{ij}$  biror funksional fazoda chiziqli yoki differensial operator bo‘lishi mumkin. Nazariy va amaliy fizika, muhandislik, mexanika va matematik geometriya sohalarida shunday matritsalarini uchratish mumkin.

Spektral xossalar deyilganda, ko‘pincha, operatorli matritsaning xossiy qiymatlari (ya’ni, spektri), xossiy vektorlari, ular bilan bog‘liq tasnif va klassifikatsiyalar, hamda bu ko‘rsatkichlarning fizik va amaliy mazmuni tushuniladi.

Ayniqsa, quyidagi muammoni o‘rganamiz:  $A X = \lambda X$ , bu yerda  $A$  – operatorli matritsa,  $X$  – vektor-funksiyalar ustuni,  $\lambda$  – xossiy qiymat (spektral parametr) [2].

Spektral muammolarni chuqurroq o‘rganishda quyidagi masalalar muhim ahamiyat kasb etadi:

- Operatorli matritsaning xossiy qiymatlari to‘plami (spektri) qanday tuzilishga ega?
- Spektr uzluksiz yoki diskret bo‘lishi mumkinmi?
- Har bir xossiy qiymatga mos xossiy vektor yoki xossiy funksiya strukturasini qanday aniqlash mumkin?
- To‘rtinchi tartibli operatorli matritsaning spektral xossalari oddiy to‘g‘ri chiziqli matritsalar yoki past tartibli operatorli matritsalar bilan qanday farqlanadi?

To‘rtinchi tartibli operatorli matritsalar uchun asosiy spektral masalalar.

Bu masalani konkretlashtirish uchun har bir  $A_{ij}$  elementi – masalan, klassik differensial operator, ya’ni  $A_{ij} = a_{ij}(x) \frac{d^k}{dx^k} + b_{ij}(x) \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} + \dots + c_{ij}(x)$

ko‘rinishda bo‘lishi mumkin. Bu yerda  $k$  – operator tartibi,  $a_{ij}(x)$ ,  $b_{ij}(x)$ ,  $c_{ij}(x)$  esa mos funksiya koeffitsiyentlaridir.

Agar operatorlar to‘rtinchi tartibli (masalan,  $d^4/dx^4$  kabi) bo‘lsa, unda asosan elastiklik nazariyasi, to‘lqin tenglamalari, panjara dinamika va boshqa sohalarda haqiqiy va kompleks spektral xususiyatlar yuzaga chiqadi. Spektral muammolarni yechishda Poisseville, Chebyshev, Laplas, Sturm-Liuvill va boshqa klassik operatorlarning xossalari, ularning simmetrik, normal, o‘z-o‘ziga qo‘shma yoki kommutativligi, cheklangan yoki cheklanmaganligi asosiy rol o‘ynaydi Operatorli matritsaning trassa va determinant tushunchalari [2].

To‘rtinchi tartibli operatorli matritsa uchun

$$A X = \lambda X$$

tenglamani o‘rganamiz. Har bir  $X$  vektor-funksiyalarning ustun ustuni bo‘lib, har biri mos funksional sohada aniqlangan. Ko‘pincha, bunday muammo chegaraviy (chegaraviy shartlar bilan), masalan,  $X(a) = 0$ ,  $X(b) = 0$ ,  $X'(a) = 0$ ,  $X'(b) = 0$  kabi va hokazo, holatlarda o‘rganiladi.

Xossiy qiymatlarning mavjudligi va ularning diskret yoki uzluksiz bo‘lishi bunda operator matritsaning simmetrikligi va o‘z-o‘ziga qo‘shmaligiga bevosita bog‘liq. Masalan, agar  $A$  – simmetrik va cheklangan operatorli matritsa bo‘lsa, unda barcha xossiy qiymatlar haqiqiy bo‘ladi, xossiy vektorlar esa o‘zaro ortogonal bo‘lishi mumkin.

Operatorli matritsaning spektri deganda,  $\lambda$  sonlarning to‘plami tushuniladi, ular uchun  $(A - \lambda I)$  operatori teskarilanuvchi emas. Odatda bu quyidagicha bo‘ladi:

- Diskret spektr (yoki nuqtaviy spektr): alohida xossiy qiymatlar majmuasi, ularning barchasiga xossiy vektorlar mos keladi.

- Uzluksiz spektr: masalan, ba’zi hududda teskari operator mavjud emas, lekin xossiy vektorlar mavjud bo‘lmasligi mumkin.

- Qoldiq (rezidual) spektr: xossiy qiymatga vektor mos kelmagan, ammo tasvir to'plami zich bo'lgan holatlar [2].

To'rtinchi tartibli operatorli matritsalarida, ayniqsa, ko'pbosqichli chegaraviy muammolarda, spektral xossalar qat'iy ortogonallik, spektral yadro, determinant va trassa kabi tushunchalarni chuqur tahlil qilishni talab etadi.

Oddiy sonli matritsalar uchun trassa va determinant aniq ta'rifga ega. Operatorli matritsalarida esa bu tushunchalarni umumlashtirish biroz murakkab bo'lsa-da, asosli chiziqli algebra va operator nazariyasi natijalariga tayanadi [3].

Trassa – operatorli matritsaning asosiy diagonal elementlarining yig'indisi sifatida qaralishi mumkin, ya'ni

$$\text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^4 A_{kk}$$

Determinant esa ko'p hollarda soxtalik teoriyasi (Fredholm determinant), spektral funksiya va funksional determinant orqali aniqlanadi. Bu tushunchalar operatorli matritsaning spektral strukturasi, ya'ni xossiy qiymatlari bilan yaqin aloqada.

To'rtinchi tartibli operatorli matritsalar ko'plab fizik muammolar, ayniqsa, ko'p komponentali muhitlarda yoki ko'p darajali elastik sistemalarda paydo bo'ladi. Masalan, elastik plita tebranishlari, elektromagnit to'lqinlar, issiqlik muvozanatining ko'p qatlamli modellari, kvant mexanikaning ko'p zarrachali hamiltonian operatorlari shular jumlasidan [4].

Ularning spektral xossalari quyidagilarda muhim ahamiyatga ega:

- Fizik sistemasining barqarorligi va tebranish chastotalari;
- Energetik spektrlar va energiya darajalarining taqsimlanishi;
- Tizimda sodir bo'ladigan deformatsiya, kuchlanish va dispersiyalarning tahlili.

To'rtinchi tartibli operatorli matritsaning spektral xossalarini o'rganishda ko'p hollarda analitik va sonli usullar uyg'un holda qo'llaniladi. Analitik usullarga asosiy algebraik manipulyatsiyalar, funksional analiz natijalari, Green funksiyalari, Fourier va Laplas o'zgartirishlari, ortogonal funksiyalar asosidagi ekspansiyalar kiradi. Sonli usullardan esa, matritsani diskretlashtirish, sonli differensial operatorga almashtirish, o'tkazish usullari, Chebyshev interpolatsiyasi, numerik yakuniy farqlar va Chebyshev

koeffitsiyentlari kabi vositalar keng qo'llaniladi. Agar operatorli matritsa muayyan sharoitlarda diagonalizatsiya qilinadigan bo'lsa, barcha xossiy qiymatlar asosiy diagonalda joylashadi, xossiy vektorlar esa ortogonal bazis hosil qiladi. Diagonalizatsiya usullari ko'p hollarda simmetrik operatorli matritsalar uchun qo'llaniladi va bu fizik muammolarning soddalashuvi, masalan, dastlabki sistemani mustaqil kichik tizimlarga ajratishda asosiy rol o'ynaydi [5].

### **Xulosa**

Umuman, to'rtinchi tartibli operatorli matritsaning spektral xossalari masalasi juda murakkab va ko'p qirralidir. Ular matematikaning zamonaviy sohalarida, fizika va texnika muammolarida muhim o'rin egallaydi, chunki bunday matritsaning xossiy qiymatlari va xossiy vektorlari ko'plab real sistemalarning barqarorligi, tebranish chastotalari va energiya taqsimoti haqida to'liq tasavvur beradi. Bundan tashqari, tahlil va sonli metodlarni uyg'un qo'llash, yangi dasturiy vositalarni ishlab chiqish va modellashtirish uchun mustahkam nazariy asoslar yaratadi. To'rtinchi tartibli operatorli matritsalarini o'rganish orqali murakkab tizimlarning ichki tuzilishidan to ularning rivojlanishiga javob beruvchi turli noaniqliklarni ilmiy asoslash va tahlil qilish mumkin. Shuningdek, ushbu tadqiqotlar zamonaviy ilmiy va texnika taraqqiyotida yangidan-yangi natijalarga erishishda yordam beradi.

### **Foydalanilgan adabiyotlar**

1. Gantmaxer F.R. Matritsalar nazariyasi. – Toshkent: Fan, 2011.
2. Qadirkulov O.A., Tursunqulov K.A., Operatorlar algebrasi va uning ilovalari. – Toshkent: Universitet, 2018.
3. Akhiezer N.I., Glazman I.M. Chiziqli operatorlar nazariyasi. – Toshkent: O'zbekiston, 2017.
4. Khalilov J.I. Operatorli tenglamalar va matritsalar. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2020.
5. Rasulov M.Q., Tadbiqiy funksional analiz. – Toshkent: Universitet, 2015.
6. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. – Berlin: Springer, 1995.
7. Dunford N., Schwartz J.T. Linear Operators. – New York: Wiley-Interscience, 1988.



8. Kreys R. Chiziqli operatorlar va spektral nazariya. – Toshkent: O‘zbekiston, 2022.