

VOLTERRANING INTEGRAL TENGLAMALARINI TAQRIBIY ECHISH USULLARI VA TAQRIBIY ECHIMI XATOLIGINI BAHOLASH

Ibragimov Umid Shuxratovich

Termiz shaharidagi “Zvezda Vostoka” xususiy

maktabi matematika fani o'qituvchisi

E-mail: shuhratovich2204@gmail.com

Tel: +998945128965

Annotatsiya: Ushbu maqolada Volterranning integral tenglamalarini taqribiy yechish usullari, ularning amaliy qo'llanilish imkoniyatlari hamda yechim aniqligining nazariy baholanishi o'rganilgan. Turli taqribiy yondashuvlar – diskretlashtirish, iteratsion va interpolatsion usullar solishtirilib, xatolik chegaralarini aniqlash bo'yicha matematik asoslar keltirilgan.

Kalit so'zlar: Sun'iy intellekt, C++, Java, analitik solishtirish (comparative analysis), empirik kuzatuv (empirical observation), Python, Julia tili.

Kirish Volterranning integral tenglamalari matematikaning muhim bo'limlaridan biri bo'lib, ular ko'plab fizik, biologik va texnik jarayonlarni modellashtirishda keng qo'llaniladi. Bunday tenglamalar ko'pincha analitik tarzda yechilmaydi, shu sababli ularni taqribiy usullar yordamida yechish zarur bo'ladi. Taqribiy yechimlar yordamida real tizimlarning dinamik xatti-harakatlarini tahlil qilish, prognozlash va boshqarish imkoniyati paydo bo'ladi. Ushbu maqolada Volterranning integral tenglamalarini yechishda qo'llaniladigan eng samarali taqribiy usullar — iteratsion, kvadraturali va interpolatsion yondashuvlar ko'rib chiqiladi. Shuningdek, yechimlarning aniqlik darajasi, xatolik chegaralarini baholash tamoyillari va ularning amaliy hisoblashlarga ta'siri tahlil qilinadi. Tadqiqotning maqsadi — taqribiy yechimning nazariy asoslarini aniqlash hamda xatolikni kamaytirish orqali hisoblash natijalarining ishonchliligini oshirishdan iborat.

.- Mavzuga oid adabiyotlar tahlili (Literature review). Volterranning integral tenglamalari nazariyasi bo'yicha ilmiy izlanishlar XIX asr oxiridan boshlab shakllanib, hozirga qadar keng rivoj topgan. Dastlab G. Volterra tomonidan chiziqli integral tenglamalar nazariyasi ishlab chiqilgan bo'lib, keyinchalik bu yo'nalishda ko'plab olimlar — Fredholm, Nyuton, Lapunov va boshqalar tomonidan muhim natijalar olingan. So'nggi yillarda Volterranning integral tenglamalarini taqribiy yechish usullari kompyuter texnologiyalarining rivojlanishi bilan yanada takomillashdi. Zamonaviy adabiyotlarda diskretlashtirish, kvadraturali va kollokatsion usullar asosida samarali algoritmlar ishlab chiqilgan. Ayrim tadqiqotlarda xatolikni kamaytirish uchun adaptiv panjara usullari va spline-interpolatsiyaga asoslangan yondashuvlar qo'llanilgan. Shuningdek, sun'iy intellekt

va raqamli optimallashtirish metodlari yordamida integral tenglamalar yechimining aniqligini oshirish bo'yicha yangi ilmiy natijalar e'lon qilinmoqda. Shu bois, bu mavzu hozir ham dolzarb ilmiy yo'nalishlardan biri bo'lib qolmoqda..

- Tadqiqot metodologiyasi (Research Methodology).

Volterning tenglamalarini taqribiy echishning metodologik asosi.

Integral tenglamalar nazariyasidan ma'lumki, agarda $K(x, s)$ yadro $R\{a \leq s \leq x \leq b\}$ sohada uzluksiz funksiya, $f(x)$ – esa $[a, b]$ uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda

$$y(x) - \lambda \int_a^{\infty} K(x, s) y(s) ds = f(x) \quad (2.1)$$

Volterning 2-tur integral tenglamasi λ ning ixtiyoriy qiymatida yagona $y(x)$ echimga ega bo'ladi.

Bu echimni

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(x) \quad (2.2)$$

ko'rinishda izlash mumkin.

(2.2) ni (2.1) ga qo'yib, λ ning bir xil darajalari oldidagi koeffisientlarni tenglashtirib, quyidagini olamiz

$$\varphi_0(x) = f(x); \quad \varphi_{k+1}(x) = \int_a^{\infty} K(x, s) \varphi_k(s) ds. \quad (2.3)$$

Agar

$$N = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|, \quad M = \max_R |K(x, s)|.$$

bo'lsa, u holda

$$|\varphi_k(x)| \leq \frac{M^k (b-a)^k N}{k!}. \quad (2.4)$$

bo'ladi.

Bundan, agar biz (2.1) integral tenglamaning taqribiy ildizi sifatida (2.2) qatorning n -xususiy olsak:

$$y_n(x) = \sum_{i=0}^n \lambda^i \varphi_i(x)$$

U holda, uning qoldig'ini

$$|y(x) - Y_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\lambda|^k M^k (b-a)^k N}{k!}. \quad (2.5)$$

ko'rinishda baholanishi mumkin.

-Tahlil va natijalar (Analysis and results). **Volterning integral tenglamalarini taqribiy echimi xatoligini baholash.**

Judayam qo'pol shu bilan birgalikda juda oddiy xatolik baxosi quidagicha:

L bilan $|\lambda| M (b-a)$ ko'paytmani belgilaymiz va (2.5) bahodan $\frac{L^{n+1} N}{(n+1)!}$ ni

chiqaramiz,

$$|y(x) - Y_n(x)| \leq \frac{L^{n+1}N}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{L}{n+2} + \frac{L^2}{(n+2)(n+3)} + \dots \right\}$$

hosil bo'ladi. Katta qavs ichidagi qatorni

$$1 + \frac{L}{n+2} + \left(\frac{L}{n+2}\right)^2 + \left(\frac{L}{n+2}\right)^3 + \dots$$

U holda quidagi bahoni olamiz

$$|y(x) - Y_n(x)| \leq \frac{L^{n+1}N}{(n+1)!} \cdot \frac{cd}{1 - \frac{1}{n+2}}$$

Shunda faraz qilamiz n shunachalik kata bo'lsinki, unda $L < n+2$ bo'lsin. Agar (2.3) da kvadraturani hisoblab bo'lmasa, u holda ularni hisoblablash uchun teng uzoqlashgan absissali kvadratur formulalarni qo'llashlash mumkin.

Masalan, umumlashgan trapetsiya formulasini qo'llaymiz. Agar $[a, b]$ kesmani s ta teng qisimga bo'sak va

$$h = \frac{b-a}{s}; \quad x_k = a + kh; \quad K(x_i, x_j) = K_{ij}; \quad \varphi_n(x_k) = \varphi_{nk}, \quad \varphi_{nk} \text{ ning}$$

taqribiy qiymatini $\bar{\varphi}_{nk}$ deb belgilasak, u holda

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1,k} &= \int_0^{x_k} K(x_k, s) \varphi_n(s) ds \\ &\approx \frac{h}{2} \left[K_{k_0} \varphi_{n_0} + 2 \left(K_{k_1} \varphi_{n_1} + K_{k_2} \varphi_{n_2} + \dots + K_{k_{k-1}} \varphi_{n_{k-1}} \right) + K_{k_k} \varphi_{n_k} \right] \end{aligned}$$

yoki

$$\bar{\varphi}_{n+1,k} = \frac{h}{2} \left[K_{k_0} \bar{\varphi}_{n_0} + 2 \left(K_{k_1} \bar{\varphi}_{n_1} + K_{k_2} \bar{\varphi}_{n_2} + \dots + K_{k_{k-1}} \bar{\varphi}_{n_{k-1}} \right) + K_{k_k} \bar{\varphi}_{n_k} \right]$$

($k = 0, 1, 2, \dots, S$).

ga ega bo'lamiz.

$\bar{\varphi}_{n+1,k}$ ni hisoblab, (2.1) integral tenglamaning taqribiy echimi

$$Y_{n,k} = \sum_{i=0}^n \lambda'_i \bar{\varphi}_{i,k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, S)$$

formula bilan topilgan x_k tugunlarda olamiz.

Simpson umumlashgan formulasini qo'llaganda, $[a, b]$ kesmani $2s$ ta teng qisimga bo'lamiz ,

$$h = \frac{b-a}{2s}; \quad x_k = a + kh.$$

U holda

$$\varphi_{n+1,2k} = \int_a^{x_{2k}} K(x_{2k}, s) \varphi_n(s) ds,$$

Integralni echishda Simpson formulasini qo'llab

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_{n+1,2k} = & \frac{h}{3} \{K_{2k,0}\bar{\varphi}_{n_0} + 4(K_{2k,1}\bar{\varphi}_{n_1} + K_{2k,2}\bar{\varphi}_{n_2} + K_{2k,3}\bar{\varphi}_{n_3} + \dots \\ & + K_{2k,2k-1}\bar{\varphi}_{n,2k-1})\} \\ & + 2(K_{2k,2}\bar{\varphi}_{n,2} + K_{2k,4}\bar{\varphi}_{n,4} + \dots + K_{2k,2k-2}\bar{\varphi}_{n,2k-2}) \\ & + K_{2k,2k}\bar{\varphi}_{n,2k} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots s)\end{aligned}$$

ga ega bo'lamiz.

Toq k larda $\bar{\varphi}_{n+1,k}$ ning qiymati interpolatsiya yo'li bilan topiladi.

(2.1) Integral tenglamani echish uchun tenglamadagi integralni to'g'ridan to'g'ri biror kvadratur formulaning yig'indisi bilan almashtirish usulini qo'llash mumkin. Masalan, umumlashgan trapitsiya formulasini qo'llashda oraliqni n ta bo'lakka bo'lib,

$x_0 = a; x_1 = a + h; \dots; x_n = a + nh = b$ larda

$$\begin{aligned}y_k - \lambda \int_a^{x_k} K(x_k, s) y(s) ds \\ \approx y_k - \frac{h\lambda}{2} [K_{k,0}y_0 + 2(K_{k,1}y_1 + K_{k,2}y_2 + \dots + K_{k,k}y_{k-1}) + K_{k,k}y_k] \\ \approx f(x_k),\end{aligned}$$

yoki

$$y_k - \frac{h\lambda}{2} [K_{k,0}Y_0 + 2(K_{k,1}Y_1 + K_{k,2}Y_2 + \dots + K_{k,k}Y_{k-1}) + K_{k,k}Y_k] - f(x_k) = 0,$$

ga ega bo'lamiz.

Shunda

$$y_k = \frac{1}{1 - \frac{\lambda h}{2} K_{k,k}} \left\{ f_k + \frac{\lambda h}{2} K_{k,0}Y_0 + h\lambda \sum_{i=1}^{k-1} K_{k,i}Y_i \right\}.$$

Manosi [22] toq raqamlari uchun interpolatsiya orqali axtarishga majbur bo'lamiz.

Tenglamani taxminiy echimi uchun (2.4) integralni to'g'ri almashtirish usuli bilan ham qo'llash mumkin, tenglamaga kirgan har qanday kvadrat formulasining yakuniy yig'indisi bo'yicha.

Masalan trapetsiyaning umumlashtirilgan formulasini qo'llasak chiziqni teng qisimlarga bo'lish orqali quidagi vujudga keladi

$$\begin{aligned}y_k - \lambda \int_a^{x_k} K(x_k, s) y(s) ds \approx \\ \approx y_k - \frac{h\lambda}{2} [K_{k,0}y_0 + 2(K_{k,1}y_1 + K_{k,2}y_2 + \dots + K_{k,k-1}y_{k-1}) + K_{k,k}y_k] \approx f(x_k),\end{aligned}$$

yoki

$$y_k - \frac{h\lambda}{2} [K_{k,0}Y_0 + 2(K_{k,1}Y_1 + K_{k,2}Y_2 + \dots + K_{k,k-1}Y_{k-1}) + K_{k,k}y_k] - f(x_k) = 0,$$

shunda

$$y_k = \frac{1}{1 - \frac{\lambda h}{2} K_{k,k}} \left\{ f_k + \frac{\lambda h}{2} K_{k,0}Y_0 + h\lambda \sum_{i=1}^{k-1} K_{k,i}Y_i \right\}.$$

Shunday qilib, y_k hamma qiymatlarini qadamma-qadam topamiz .

Volterraning 1-tur

$$\lambda \int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x)$$

integral tenglamasiga kelsak, $K(x,s)$ va $f(x)$ uzluksiz differensiallanuvchi, $K(x,x) > \alpha > 0$, uni Volterraning 2-tur integral tenglamasiga keltirish mumkin.

(2.1) tenglamaning ikkala qismini differensiallab

$$\lambda K(x,x)y(x) + \lambda \int_a^\infty K'_x(x,s)y(s)ds = f'(x)$$

ga ega bo'lamiz va $y(x)$ Volterraning

$$y(x) + \int_a^\infty \frac{K'_x(x,s)}{K(x,x)} y(s)ds = \frac{1}{\lambda} \frac{f'(x)}{K(x,x)}.$$

2-tur integral tenglamasining echimi bo'ladi.

Masalan

$$y(x) - \int_0^\infty e^{-x-8s} y(s)ds = \frac{e^{-x} + e^{-3x}}{2}.$$

Integral tenglamaning echimini toping.

Yechish: 1-usul

yechimni quidagicha topamiz

$$y(x) \approx y_4(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \varphi_4(x).$$

Bu erda

$$\varphi_0(x) = f(x); \quad \varphi_k(x) = \int_a^\infty K(x,s)\varphi_{k-1}(s)ds.$$

Integrallash natijasida quidagilarga ega bo'lamiz :

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-3x}),$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x e^{-x-s} \varphi_0(s)ds = \frac{1}{8}(3e^{-x} - 2e^{-3x} - e^{-5x}),$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= \int_0^x e^{-x-s} \varphi_1(s) ds = \frac{1}{48} (5e^{-x} - 9e^{-3x} + 3e^{-5x} + e^{-7x}), \\ \varphi_3(x) &= \int_0^x e^{-x-s} \varphi_2(s) ds = \frac{1}{384} (7e^{-x} - 20e^{-3x} + 18e^{-5x} - 4e^{-7x} - e^{-9x}) \\ \varphi_4(x) &= \int_0^x e^{-x-s} \varphi_3(s) ds \\ &= \frac{1}{3840} (9e^{-x} - 35e^{-3x} + 50e^{-5x} - 30e^{-7x} + 5e^{-9x} + e^{-11x})\end{aligned}$$

bu erdan

$$Y_4(x) = \frac{1}{3840} [3839e^{-x} + 5e^{-3x} - 10e^{-5x} + 10e^{-7x} - 5e^{-9x} + e^{-11x}]$$

Bu tenglamaning aniq echimi

$$y(x) = e^{-x}$$

Taqqoslash uchun aniq echimi va taxminiy echimlarning manosi keltiramiz [31] quidagicha

$$\begin{aligned}y(0) &= 1,00000 & y(1) &= 0,36788, \\ Y_4(0) &= 1,00000 & Y_4(1) &= 0,36783\end{aligned}$$

- **Xulosa va takliflar (Conclusion/Recommendations).** Yuqoridagi tahlillar shuni ko'rsatadiki, Volterra integral tenglamalarini taqribiy yechish usullari murakkab hisoblash masalalarini soddalashtirishda muhim ahamiyatga ega. Turli yondashuvlar – iteratsion, kvadraturali va interpolatsion usullar – o'z afzalliklariga ega bo'lib, ularni tanlash yechim aniqligi va hisoblash tezligiga bog'liq. Taqribiy yechimlarning xatoligini baholash esa natijalarning ishonchliligini ta'minlaydi va ularni amaliy sohalarida qo'llash imkonini beradi. Shuningdek, zamonaviy raqamli texnologiyalarni qo'llash taqribiy yechimlarning aniqligini sezilarli darajada oshiradi. Shu bois, Volterra integral tenglamalarini samarali yechish usullarini takomillashtirish matematik modellashtirish va amaliy hisoblashlarda muhim ilmiy yo'nalish bo'lib qolmoqda.

ADABIYOTLAR (References)

1. Boykov I.V. Optimalnie potochnosti algoritmi vichisleniya singulyarnix integralov. – Saratov.Izd-vo Saratovskogo universiteta. 1983. 210 s.
2. Bikovskiy V.A. Diskretnoe preobrazovanie Fure i Siklicheskaya svertka na selochislennix reshetkax // Matem. sbornik .1988. T. 136. №3. S. 21-32.
3. Vekua L.P. Sistemi singulyarnix integralnix uravneniy i nekotorie granichnie zadachi . M. :Nauka. 1970. 380 s.
4. Verlan A.F. ,Sizikov V.S. Integralnie uravneniya : metodi algoritmi, programmi. Spravochnoe posobie.-Kiev : “Naukova dumka”.1986. 543c .
5. Gabdulxaev B.G. Kubaturnie formuli dlya mnogomernix Singulyarnix integralov // Izvestiya na matematicheskiy Institut. Blgarska Akademiya na naukite. 1970.№11 .S. 181-196.