

**KASR TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN
KOSHI MASALASI YECHIMINING MAVJUDLIGI VA
YAGONALIGI: CAPUTO HOSILASI ASOSIDA TAHLIL**

Safarboyeva Maftuna Aminboy qizi

Xorazm viloyati Osiyo Xalqaro Universiteti

Masofaviy matematika magistratura 1-kurs talabasi

Annotatsiya. Mazkur maqolada kasr tartibli differensial tenglamalar uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi Caputo hosilasi asosida tahlil qilinadi. Caputo hosilasi boshlang'ich shartlarni klassik ko'rinishda berish imkonini bergani sababli amaliy modellashtirishda keng qo'llanadi. Tadqiqotning markaziy g'oyasi shundan iboratki, kasr hosilali tenglama mos kasr integral operatori yordamida Volterra tipidagi integral tenglamaga ekvivalent o'tkaziladi va so'ng yechimning mavjudligi hamda yagonaligi fiks nuqta usullari orqali asoslanadi.

Kalit so'zlar: kasr tartibli differensial tenglama, Koshi masalasi, Caputo hosilasi, Volterra integral tenglama, mavjudlik, yagonalik.

KIRISH

Kasr tartibli differensial tenglamalar so'nggi o'n yilliklarda matematik fizika va amaliy modellashtirishda alohida ahamiyat kasb etmoqda. Bunday tenglamalar oddiy differensial tenglamalardan farqli ravishda xotira effektini, uzoq muddatli ta'sirlarni hamda muhitning merosiy xususiyatlarini tabiiy tarzda ifodalay oladi. Masalan, anomall diffuziya, viskoelastik materiallar, biologik tizimlar va iqtisodiy jarayonlarda o'tgan holatlarning hozirgi dinamikaga ta'siri kuchli bo'lishi mumkin, kasr hosilali operatorlar esa aynan shu xususiyatni matematik shaklda ushlaydi. Shu bilan birga, kasr tartibli differensial tenglamalar bilan ishlashda asosiy nazariy masala yechimning

mavjudligi va yagonaligini ta'minlaydigan shartlarni aniq belgilashdir, chunki har qanday modelning ishonchliligi avvalo uning matematik qo'yilishi to'g'ri ekaniga tayanadi.

ASOSIY QISM

Avval qo'yilishni aniqlashtiramiz. T noldan katta son bo'lsin va t 0 dan T gacha oraliqda qaralsin. 0 dan 1 gacha bo'lgan α son kasr tartib bo'lsin. Koshi masalasi quyidagicha talqin qilinadi: Caputo ma'nodagi α tartibli hosila $D^{\alpha} y$ mavjud bo'lib, u tenglama $D^{\alpha} y = f(t)$, $y(0) = y_0$ ni qanoatlantirsin va boshlang'ich shart $y(0) = y_0$ nol nuqtadagi qiymati y_0 ga teng bo'lsin. Bu yerda f funksiyasi t va y ga bog'liq bo'lgan berilgan nolinear funksiya bo'lib, uning xossalari yechimning mavjudligi hamda yagonaligini belgilaydi.

Caputo hosilasi ta'rifining muhim oqibati shundaki, ushbu differensial tenglama kasr integral operatori orqali Volterra tipidagi integral tenglamaga ekvivalent o'tkaziladi. G'oyaviy jihatdan bu shunday: agar $D^{\alpha} y = f(t)$, $y(0) = y_0$ bo'lsa, u holda $y(t)$ quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi: $y(t) = y_0 + I^{\alpha} f(s)$, $y(s)$ integral ko'rinishida, bu yerda I^{α} kasr integral operatori bo'lib, yadro t minus s darajali α minus 1 ko'rinishidagi og'irlikka ega. Natijada masala differensial tenglama emas, balki uzluksiz funksiyalar fazosida operator tenglamaga aylanadi. Bu o'tish juda muhim, chunki integral tenglama uchun fiks nuqta teoremlari bevosita ishlaydi. Mazkur ekvivalentlik kasr tartibli tenglamalar nazariyasidagi standart tayanch natijalardan biri bo'lib, Caputo hosilasi bilan boshlangan shartlarning mosligi shu yerda o'zini ko'rsatadi.

Endi mavjudlik va yagonalik uchun klassik yetarli shartlarni beramiz. $C[0, T]$ fazoda uzluksiz funksiyalar to'plamini olamiz va unda sup norma bilan ishlaymiz, ya'ni $\|y\| = \sup\{|y(t)| : t \text{ 0 dan } T \text{ gacha}\}$. Operatorni aniqlaymiz: $A y = y(0) + I^{\alpha} f(s)$, $y(s)$. Demak, yechim topish $A y = y$ tenglamani yechish bilan bir xil.

Birinchi asosiy shart uzluksizlikdir: $f(t)$, y funksiyasi t bo'yicha uzluksiz bo'lsin va y bo'yicha ham uzluksiz bo'lsin, shuningdek t 0 dan T gacha va y

ma'lum chegaralangan sohada bo'lganda f chegaralangan bo'lsin. Ikkinchi asosiy shart Lipschitz shartidir: shunday L musbat son mavjud bo'lsinki, barcha $t \in [0, T]$ gacha va barcha y_1, y_2 uchun $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$ bo'lsin. Bu shartning ma'nosi shuki, f y bo'yicha haddan tashqari keskin o'zgarib ketmaydi, shuning uchun operator A farqni nazorat qiladigan tarzda qisqaruvchi bo'lishi mumkin.

Banax fiks nuqta teoremasini qo'llash uchun A ning qisqaruvchanligini ko'rsatamiz. Ikki funksiyani olamiz y va z . U holda $Ay - Az = \int_0^t f(s, y(s)) - f(s, z(s)) ds$. Modul olib, Lipschitz shartini qo'llasak, $|Ay - Az| \leq \int_0^t L |y(s) - z(s)| ds$. Sup normani olganda, $\|y - z\| \leq \|y - z\|$ bo'lgani uchun $\|Ay - Az\| \leq L \|y - z\|$ bo'lsa, Kasr integralning birlik funksiyaga ta'siri t darajali α ko'rinishida baholanadi, natijada $\|Ay - Az\| \leq q \|y - z\|$, bu yerda $q = L T^\alpha / \Gamma[1+\alpha]$. Agar $q < 1$ dan kichik bo'lsa, operator A qisqaruvchi bo'ladi. Demak, L va T shunday tanlansinki, $L T^\alpha / \Gamma[1+\alpha] < 1$ bo'lsa, Banax fiks nuqta teoremasiga ko'ra $C[0, T]$ fazoda A operatorning yagona fiks nuqtasi mavjud, ya'ni Koshi masalasining yagona yechimi mavjud bo'ladi. Bu natija lokal bo'lib, T yetarlicha kichik tanlanganda doim bajariladi. Shunday qilib, Lipschitz doimiysi L berilgan bo'lsa, T ni kichik olish orqali mavjudlik va yagonalik kafolatlanadi.

Mavjudlikni faqat qisqaruvchanlikka bog'lamasdan, umumiyroq shartlar bilan ham ko'rsatish mumkin. Masalan, f uzluksiz va y bo'yicha lokal Lipschitz bo'lsa, yechim lokal mavjud va yagona bo'ladi. Agar f faqat uzluksiz bo'lsa, u holda Peano tipidagi mavjudlik natijalari kasr tartibli holatda ham moslashtiriladi, biroq yagonalik kafolatlanmaydi. Ushbu maqola doirasida amaliy jihatdan eng ko'p qo'llanadigan variant, ya'ni uzluksizlik va Lipschitz sharti ostidagi mavjudlik va yagonalik natijasiga urg'u beriladi.

Endi yechimni konstruktiv topish g'oyasini ham qisqacha yoritamiz. Picard iteratsiyasi quyidagicha beriladi: $y_0(t) = y_0$, $y_{n+1}(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y_n(s)) ds$. Agar yuqoridagi qisqaruvchanlik sharti bajarilsa, bu ketma ketlik $C[0, T]$ da yagona

yechimga yaqinlashadi. Yaqinlashuv tezligi ham baholanadi: $\|y_n$ minus $y\|$ geometrik progressiya kabi kamayadi va q darajasiga bog‘liq bo‘ladi. Bu amaliy hisoblashda ham foydali, chunki kasr tartibli tenglamalarning ko‘plab sonli usullari aynan integral ko‘rinishdan boshlanadi va iteratsion yondashuvlarni talab qiladi.

Mavjudlik va yagonalikning yana bir muhim tomoni barqarorlik va boshlang‘ich shartga bog‘liqlikdir. Agar y_0 biroz o‘zgarsa yoki f funksiyada kichik o‘zgarish bo‘lsa, yechim ham uzluksiz tarzda o‘zgarishi kutiladi. Operator baholashlar aynan shuni ko‘rsatadi: yechimlar farqi boshlang‘ich farqqa va f farqiga proporsional tarzda cheklanishi mumkin. Bu natija modellashtirishda juda muhim, chunki real ma’lumotlar aniq emas, o‘lchov xatolari bo‘ladi, shuningdek parametrlar taxminiy bo‘ladi. Agar yechim barqaror bo‘lmasa, modelning amaliy qiymati pasayadi. Caputo hosilasi va integral tenglama yondashuvi bu bog‘liqlikni baholash uchun qulay instrument beradi.

XULOSA VA MUNOZARA

Caputo hosilasi asosida qo‘yilgan kasr tartibli differensial tenglamalar uchun Koshi masalasida yechimning mavjudligi va yagonaligi masalasi integral tenglama yondashuvi orqali samarali hal etiladi. Mazkur maqolada differensial tenglamani Volterra tipidagi integral tenglamaga ekvivalent o‘tkazish g‘oyasi asosiy tayanch sifatida olindi va $C[0,T]$ fazoda operator tenglama ko‘rinishida yechim fiks nuqta sifatida talqin qilindi. f funksiyaning uzluksizligi va y bo‘yicha Lipschitz sharti bajarilganda, T yetarlicha kichik tanlansa, operator qisqaruvchi bo‘ladi va Banach fiks nuqta teoremasi yordamida yechimning mavjudligi hamda yagonaligi kafolatlanadi. Bu natija kasr tartibli modellarni qo‘yishda nazariy ishonchlilik beradi, chunki yechimning yagona bo‘lishi modelning aniqligini, mavjud bo‘lishi esa masalaning umuman ma’noga egaligini ta’minlaydi.

ADABIYOTLAR RO`YXATI

1. Podlubny I. Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 2019. 340 p.
2. Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 540 p.
3. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. Berlin: Springer, 2010. 247 p.
4. Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I. Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications. New York: Gordon and Breach, 1993. 1006 p.