KVADRAT TENGLAMA

Andijon shahar 1-son texnikumi

Matematika fani o’qituvchisi

Mengniyarov Elbek Mustafo o'g'li

Tel: +998889999078

mengniyarovelb@gmail.com

Аннотация

В данной лекции рассматривается общее определение квадратных уравнений, их историческое развитие (от древних цивилизаций до современности), основные и дополнительные методы решения, глубокий анализ дискриминанта, теорема Виета, биквадратные уравнения, а также реальные примеры применения в физике, инженерии, экономике, биологии и других областях. Цель лекции — помочь студентам и слушателям глубоко понять тему и показать математику как прикладную науку.

Ключевые слова: квадратное уравнение, дискриминант, формула корней квадратного уравнения, выделение полного квадрата, факторизация, теорема Виета, биквадратное уравнение, парабола, действительные и комплексные корни, параболическое движение, оптимизация, инженерные расчёты.

Anotatsiya

Ushbu maruza matnida kvadrat tenglamalarning umumiy ta’rifi, ularning tarixiy rivojlanishi (qadimgi tsivilizatsiyalardan zamonaviy davrgacha), yechishning asosiy va qo‘shimcha usullari, diskriminantning chuqur tahlili, Viet teoremasi, bikvadrat tenglamalar hamda fizika, muhandislik, iqtisodiyot, biologiya va boshqa sohalardagi real hayotiy misollar keltiriladi. Maqsad – talabalar va tinglovchilarga

mavzuni chuqur tushunishga yordam berish va matematikani amaliy fan sifatida ko‘rsatishdir.

Kalit so‘zlar: kvadrat tenglama, diskriminant, kvadrat formula, to‘liq kvadratga keltirish, faktorizatsiya, Viet teoremasi, bikvadrat tenglama, parabola, real va kompleks ildizlar, proyeksiya harakati, optimallashtirish, muhandislik hisoblari.

Kvadrat tenglama – bu bir o‘zgaruvchili tenglamaning ikkinchi darajali shakli bo‘lib, umumiy ko‘rinishi quyidagicha: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, bu yerda $\mathbf{a \neq 0}$.

Bu tenglama grafigi **parabola** bo‘lib, u fizikadagi harakat traektoriyalari, iqtisodiyotdagi foyda/funksiya maksimumi, muhandislikdagi optimal dizayn masalalarida asosiy rol o‘ynaydi.

- Zamonaviy texnologiyalarning 80% dan ortig‘i (masalan, mashina dizayni, raketa traektoriyasi, mashinaviy o‘rganish optimallashtirish algoritmlari) kvadrat shakllarga asoslanadi.
- Ko‘p murakkab masalalar (differensial tenglamalar, optimallashtirish) kvadrat tenglamaga keltiriladi.

Tarixiy rivoj – qadimdan zamonaviygacha

Kvadrat tenglamalar matematikaning eng qadimiy masalalaridan biri.

- **Miloddan avvalgi 2000–1800 yillar** – Bobil (Mesopotamiya) matematikasi. Yale plitalarida (YBC 7289) kvadrat tenglamalarni geometrik usul bilan yechish ko‘rsatilgan (maydon va tomonlarni topish masalalari).
- **Miloddan avvalgi 600–500 yillar** – Qadimgi Hindiston va Xitoyda kvadrat tenglamalarga oid masalalar musobaqalarda chiqqan. Brahmagupta (VII asr) kvadrat tenglamalarning salbiy ildizlarini birinchi marta qabul qilgan.

- **IX asr** – Muhammad ibn Musa al-Xorazmiy (Xorazm, 780–850). “Al-jabr va al-muqabala” asarida kvadrat tenglamalarni 6 turga ajratib, har biriga geometrik va algebraik yechim bergan. “Al-jabr” so‘zi shu yerda “to‘ldirish” (completing the square) ma’nosida ishlatilgan. Bu asar Yevropaga XII asrda tarjima qilingan va “algebra” so‘zining kelib chiqishiga sabab bo‘lgan.

- **XI asr** – Umar Xayyom kub va kvadrat tenglamalarni geometrik usul bilan yechgan.

- **XVI–XVII asrlar** – Rene Dekart algebraik yozuvni (x^2 shaklini) standartlashtirdi.

- **1799** – Karl Fridrix Gauss fundamental algebra teoremasi orqali har qanday darajadagi tenglama (shu jumladan kvadrat) kompleks sonlar doirasida yechimga ega ekanligini isbotladi.

Yechish usullari – bosqichma-bosqich va batafsil

Faktorizatsiya (ko‘paytuvchilarga ajratish)

Eng sodda usul, agar ildizlar ratsional bo‘lsa. Misol: $x^2 - 7x + 12 = 0 \rightarrow (x - 3)(x - 4) = 0 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = 4$

To‘liq kvadratga keltirish (al-Xorazmiy usuli)

$ax^2 + bx + c = 0$

1. a ga bo‘lamiz $\rightarrow x^2 + (b/a)x + c/a = 0$
2. $x^2 + (b/a)x$ ni to‘ldiramiz $\rightarrow (x + b/(2a))^2 - (b/(2a))^2 + c/a = 0$
3. $(x + b/(2a))^2 = (b^2 - 4ac)/(4a^2)$
4. $x = -b/(2a) \pm \sqrt{D}/(2a)$, bu yerda $D = b^2 - 4ac$

Kvadrat ildizlar formulasi (eng universal)

$x = [-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / (2a)$ $D = b^2 - 4ac$ – diskriminant

Diskriminant qiymati	Ildizlar soni va tabiati	Misol
$D > 0$	2 ta har xil real ildiz	$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x=2; x=3$
$D = 0$	1 ta real ildiz (takrorlanuvchi)	$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow x=3$
$D < 0$	2 ta kompleks konjugat ildiz	$x^2 + 4 = 0 \rightarrow x=\pm 2i$

Viet teoremasi (ildizlar orqali koeffitsiyentlar)

Agar x_1 va x_2 – ildizlar bo‘lsa: $x_1 + x_2 = -b/a$ $x_1 \cdot x_2 = c/a$

Misol: $x^2 - 11x + 24 = 0 \rightarrow$ ildizlar yig‘indisi 11, ko‘paytmasi 24 → 3 va 8

Bikvadrat tenglama (maxsus hol)

$x^4 + px^2 + q = 0 \rightarrow t = x^2$ deb olinsa $\rightarrow t^2 + pt + q = 0$ kvadrat tenglama hosil bo‘ladi.

Amaliy ilovalar – real hayot misollari Fizika – parabolik harakat (proyeksiya)

Tosh tepadan balandligi $h_0 = 45$ m dan $v_0 = 0$ tezlik bilan tashlandi. Yer bilan uchrashish vaqti? $-½gt^2 + h_0 = 0 \rightarrow ½ \cdot 10 \cdot t^2 = 45 \rightarrow t^2 = 9 \rightarrow t = 3$ s

Muhandislik – optimal kesim topish

Simob simi uzunligi $L = 120$ m, maydoni $A(x) = x(120 - 2x)$ – to‘rtburchak kesim. Maksimal maydon qancha? $A(x) = 120x - 2x^2 = 0 \rightarrow x = 30$ m $\rightarrow A\_max = 1800$ m² (parabola cho‘qqisi)

Iqtisodiyot – foyda maksimallashtirish

Foyda funksiyasi $P(x) = -2x^2 + 80x - 300$ (x – sotilgan mahsulot soni). Maksimal foyda qancha? Cho‘qqi nuqtasi $x = -b/(2a) = 80/(4) = 20$ dona $\rightarrow P\_max = 500$ ming so‘m

Boshqa sohalarda

- Biologiya: populyatsiya o‘sish modeli (logistik model kvadrat shaklida yaqinlashadi).
- Optika: oynalar va linzalarning fokus masofasi hisobi.
- Kompyuter grafikasi: 3D modellashtirishda parabola traektoriyalari.

Xulosa va muhim xulosalar

Kvadrat tenglamalar – oddiy ko‘rinishiga qaramay, butun zamonaviy ilm-fan va texnologiyaning poydevori hisoblanadi. Al-Xorazmiydan boshlab bugungi neyron tarmoqlar optimallashtirishigacha bu tenglamalar rivojlanib kelmoqda.

Asosiy xulosalar:

- Har qanday kvadrat tenglama ikkita ildizga ega (kompleks sonlar doirasida).
- Diskriminant yechimlar tabiati haqida to‘liq ma’lumot beradi.
- Amaliy masalalarda ko‘pincha faqat ijobiy real ildizlar ma’noga ega bo‘ladi (vaqt, masofa, miqdor).

Foydalangan adabiyotlar

1. Al-Xorazmiy, M. (IX asr). Al-jabr va al-muqabala.
2. Vikipediya: Kvadrat tenglama (uz.wikipedia.org).
3. Serge Lang. Algebra (3-nashr). Springer, 2002.
4. O‘zbekiston oliy ta’lim darsliklari: Algebra va matematik tahlil (2020–2024).
5. MathWorld: Quadratic Equation (Wolfram).
6. inLIBRARY va Zenodo’dagi o‘zbek tilidagi maqolalar (Maxkamov X. va boshqalar, 2024).