КВАДРАТИЧНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ, ПОСТРОЕННЫЕ ПО БИНОМИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ

Х. Ж.Мейлиев *Иктисодиёт ва педагогика университети,*

«Математика» кафедраси доценти,

Г.И.Фахритдинова

Ахборот технологияси ва менежмент университети магстери.

E-mail: meylievxabibulla@gmail.com

Тел.: +998 (91)-220-87--97

Аннотация: В данной статье исследуются квадратичные стохастические операторы, построенные на основе биномиального распределения. Изучаются основные динамические свойства оператора, включая стационарные точки, устойчивость и предельное поведение траекторий. Полученные результаты способствуют развитию теории нелинейных стохастических операторов.

Ключевые слова: квадратичный стохастический оператор, биномиальное распределение, стационарная точка, устойчивость, динамическая система.

QUADRATIC STOCHASTIC OPERATORS CONSTRUCTED FROM BINOMIAL DISTRIBUTIONS

Abstract: This paper studies quadratic stochastic operators constructed based on the binomial distribution. The main dynamical properties of the operator, including fixed points, stability, and limiting behavior of trajectories, are analyzed. The results contribute to the development of the theory of nonlinear stochastic operators.

Keywords: quadratic stochastic operator, binomial distribution, fixed point, stability, dynamical system.

Пусть $|\Lambda| = n$ и $\Phi = \{A, a\}$. Для клетки $\sigma \in \Omega$ положим $n_A(\sigma)$- число аллелей А в клеткеи σ (т.е. число «успехов») и зададим меру μ_a на Ω как биномиальное распределение

$$\mu_a(\sigma) = p^{n_A(\sigma)} q^{n - n_A(\sigma)}$$

Где $p \geq 0,\ q \geq 0,\ p + q = 1$ и $p / q = \alpha$. При $p = q$ т.е. $\alpha = 1$, мера μ_1 является равномерным распределением на Ω. Пусть теперь множество ребер графе (Λ, L)- пусто, т.е. Λ не снабжено структурной графа. В этом случае, отнождествляя клетки σ_1 и σ_2, у которых $n_A(\sigma_1) = n_A(\sigma_2)$, образуем пространство клеток $\Omega = \{\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2, ..., \widetilde{\sigma}_n$, где $\widetilde{\sigma}_l$-совокупность клеток с $n_A(.) = l\}$, на котором определено распределение

$$\mu_a(\widetilde{\sigma}_l) = C_n^l p^l q^{n-1} \qquad (1)$$

Пусть $\widetilde{V}_\alpha$ квадратичный оператор, построенный по распределению (1) и действующий на

$$S(\Omega) = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_l \geq 0,\ l = \overline{0, n},\ \sum_{l=1}^{n} x_l = 1 \right\}$$

Квадратичный оператор называется менделевским, если правила наследования, определенные этим оператором, удовлетворяют знаком Менделя (1). Приведем некоторые модели, описываемые квадратичными операторами.

Во всех ниже следующих примерах предполагается, что $p = q = 1/2$ и соответствующие множества Λ, с $|\Lambda| = n$ не снабжены структурой графа.

1. Случай $n = 1$. В модели наследственной передачи, предложенной Элстоном и Стьюартом в 1971 году (1), передача признака от родителей к потомству описывается тремя показателями вероятности этой передачи:

$p_{AA,A}$ - от родителя с генотипом АА ребенку передается аллель А ,

$p_{Aa,A}$ - от родителя с генотипом А*a* ребенку передается аллель А ,

$p_{aa,A}$ - от родителя с генотипом *aa* ребенку передается аллель А .

И тогда $$p_{...,a}=1-p_{...,A} \qquad (2)$$

Пусть x_1 и x_2-частоты алелей А и *a* соответственно. Тогда, так как (x_1 x_2)$\in S^1$, квадратичный стохастический оператор определяет, как изменяются частоты аллелей от поколения к поколению по формуле (1)

$$\begin{cases} x_1' = p_{AA,A}x_1^2 + 2p_{Aa,A}x_1x_2 + p_{aa,A}x_2^2 \\ x_2' = p_{AA,a}x_1^2 + 2p_{Aa,a}x_1x_2 + p_{aa,a}x_2^2 \end{cases} \qquad (3)$$

В соответствии с гипотезой о менделевском типе наследования вероятности определены следующим образом:

$$\begin{array}{lll} p_{AA,A}=1 & p_{Aa,A}=1/2 & p_{aa,A}=0 \\ p_{AA,a}=0 & p_{Aa,a}=1/2 & p_{aa,a}=1 \end{array} \qquad (4)$$

Подставляя величины (1.2.4) в (1.2.3), получим $\begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_1x_2 \\ x_2' = x_2^2 + x_1x_2 \end{cases}$

Отсюда, т.к. $x_1+x_2=1$ окончательно имеем $\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$ (5)

Т.е. частоты аллелей не изменяются от поколения к поколению, что составляет первое утверждение в законе Харди-Вайнберга.

Предложение 1. Закон Харди-вайнберга о неизменности частоты аллелей от поколения к поколению справедлив только при менделевском типе наследования.

Доказательство. Введем следующие обозначения: $p_{AA,A}=a,\ p_{Aa,A}=b,\ p_{aa,A}=c$, тогда утверждение Харди-Вайнберга записывается следующим образом: $x=ax^2+2bx(1-x)+c(1-x)^2$

Или после некоторых упрощений $x=(a-2b+c)x^2+2(b-c)x+c$

Тогда неизменность частоты следует при $\begin{cases} a-2b+c \\ 2(b-c)=1 \\ c=0 \end{cases}$

Решив эту систему, получим $a=1,\ b=1/2,\ c=0$ откуда и следует утверждение предложения 1.

Из (5) видно, что $V(S^1)=S^1$.

2. Случай $n=2$. Пусть $x=(x_1,x_2,x_3)\in S^2$ - частоты генотипов АА А*a* и *aa* соответственно. Обозначим для краткости генотипы АА, А*a* и *aa* через 1,2 и 3 соответственно. При менделевским типе наследования квадратичный оператор $\{p_{lj,k}\}_{l,j,k=1}^{3}$ определяется следующим образом

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Частоты генотипов от поколения к поколению изменяются по формуле (1.1.1). Подставляя в (1.1.1) выше указанные вероятности, получим

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_1x_2 + 1/4x_2^2 \\ x_2' = x_1x_2 + 1/2x_2^2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 \\ x_3' = 1/4x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 \end{cases}$$

Или окончательно

$$\begin{cases} x_1' = (x_1 + 1/2x_2)^2 \\ x_2' = 2(x_1 + 1/2x_2)(x_3 + 1/2x_2) \\ x_3' = (x_3 + 1/2x_2)^2 \end{cases} \qquad (6)$$

Чтобы определить частоты генотипов в следующем поколении, в (6) необходимо подставить $x_1',\ x_2'$ и x_3' вместо $x_1,\ x_2$ и x_3 соответственно, т.е. получим уравнения

$$\begin{cases} x_1'' = \left(x_1' + 1/2x_2'\right)^2 \\ x_2'' = 2\left(x_1' + 1/2x_2'\right)\left(x_3' + 1/2x_2'\right) \\ x_3'' = \left(x_3' + 1/2x_2'\right)^2 \end{cases} \quad (7)$$

Или, подставляя в (7) выражения (6) окончательно имеем

$$\begin{cases} x_1'' = \left(x_1 + 1/2x_2\right)^2 \\ x_2'' = 2\left(x_1 + 1/2x_2\right)\left(x_3 + 1/2x_2\right) \\ x_3'' = \left(x_3 + 1/2x_2\right)^2 \end{cases}$$

Откуда следует, что частоты генотипов во всех последующих поколениях будут такими же, как в первом поколении. Сформулируем это свойство в виде следующего предложения.

Предложения 2. устойчивая (стабильная) частота генотипов достигается за одно поколение.

Это предложение есть третье утверждение закона Харди-Вайнберга, правда, чуть в общем виде.

Из (6) видно что прообраз точки (0;1;0) пуст, откуда следует, что оператор не является сюрьективным отображением.

3.Случай $n=3$. Пусть $x=\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) \in S^3$ - частоты генотипов ААА, А*аа*, А*аа* и ааа соответственно. Обозначим для краткости генотипы ААА, АА*а*, А*аа* и *ааа* через 1,2,3 и 4 соответственно. Несложные вычисления показывают, что соответствующий оператор $\left\{p_{l\,j,k}\right\}_{l,j,k=1}^4$ определяется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/9 & 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & 0 & 1/18 & 0 & 0 \\ 0 & 5/9 & 2/9 & 0 & 1/2 & 2/3 & 1/2 & 4/9 & 1/6 & 0 \\ 0 & 2/9 & 5/9 & 0 & 0 & 1/6 & 1/2 & 4/9 & 2/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2/9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/18 & 1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Частоты генотипов от поколения к поколению изменяются по формуле (1). Подставляя в (1) выше указанные вероятности, получим

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_1x_2 + 2/9x_2^2 + 1/3x_1x_3 + 1/9x_2x_3 \\ x_2' = x_1x_2 + 5/9x_2^2 + 4/3x_1x_3 + 8/9x_2x_3 + 2/9x_3^2 + x_1x_4 + 1/3x_2x_4 \\ x_3' = x_1x_4 + 5/9x_3^2 + 4/3x_4x_2 + 8/9x_2x_3 + 2/9x_2^2 + x_3x_4 + 1/3x_1x_3 \\ x_4' = 2/9x_3^2 + x_4^2 + 1/9x_2x_3 + 1/3x_2x_4 + x_3x_4 \end{cases}$$

Упрощая, получим

$$\begin{cases} x_1' = (x_1 + 1/3x_2)(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3) \\ x_2' = (x_1 + 1/3x_2)(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2) + 2/3(x_3 + x_3)(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3) \\ x_3' = (x_4 + 1/3x_3)(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3) + 2/3(x_2 + x_3)(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2) \\ x_4' = (x_4 + 1/3x_3)(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2) \end{cases} \qquad (8)$$

Чтобы определить частоты генотипов в следующем поколении, в (8) необходимо подставить x_1', x_2', x_3' *и* x_4' вместо x_1, x_2, x_3 и x_4 соответственно, т.е. получим уравнения

$$\begin{cases} x_1'' = (x_1' + 1/3x_2')(x_1' + 2/3x_2' + 1/3x_3') \\ x_2'' = (x_1' + 1/3x_2')(x_4' + 2/3x_3' + 1/3x_2') + 2/3(x_2' + x_3')(x_1' + 2/3x_2' + 1/3x_3') \\ x_3'' = (x_4' + 1/3x_3')(x_1' + 2/3x_2' + 1/3x_3') + 2/3(x_2' + x_3')(x_4' + 2/3x_3' + 1/3x_2') \\ x_4'' = (x_4' + 1/3x_3')(x_4' + 2/3x_3' + 1/3x_2') \end{cases} \qquad (9)$$

Или, подставляя в (9) выражения (8), окончательно имеем

$$\begin{cases} x_1'' = 1/3(x_1 + 1/3x_2)(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3) + 2/3(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3)^3 \\ x_2'' = 1/3(x_1 + 1/3x_2)(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2) + 2/9(x_2 + x_3)(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3) + \\ + 2(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3)^2 (x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2) \\ x_3'' = 1/3(x_4 + 1/3x_3)(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3) + 2/9(x_2 + x_3)(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2) + \\ + 2(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3)(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2)^2 \\ x_4'' = 1/3(x_4 + 1/3x_3)(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2) + 2/3(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2)^3 \end{cases}$$

Методом математической индукции по n можно доказать следующую формулу

$$
\begin{cases}
x_1^{(n+1)} = 1/3^n\left(x_1 + 1/3x_2\right)\left(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3\right) + \left(3^n - 1\right)/3^n\left(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3\right)^3 \\
x_2^{(n+1)} = 1/3^n\left(x_1 + 1/3x_2\right)\left(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2\right) + 2/3^{n-1}\left(x_2 + x_3\right)\left(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3\right) + \\
+\left(3^n - 1\right)/3^{n-1}\left(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3\right)^2\left(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2\right) \\
x_3^{(n+1)} = 1/3^n\left(x_4 + 1/3x_3\right)\left(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3\right) + 2/3^{n-1}\left(x_2 + x_3\right)\left(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2\right) + \\
+\left(3^n - 1\right)/3^{n-1}\left(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3\right)\left(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2\right)^2 \\
x_4^{(n+1)} = 1/3^n\left(x_4 + 1/3x_3\right)\left(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2\right) + \left(3^n - 1\right)/3^n\left(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2\right)^3
\end{cases}
$$

При $n \to \infty$ получаем, что
$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = \left(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3\right)^3 \\
&\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} = 3\left(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3\right)^2\left(x_4 + 2/3x_2 + 1/3x_3\right) \\
&\lim_{n\to\infty} x_3^{(n)} = 3\left(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3\right)\left(x_4 + 2/3x_2 + 1/3x_2\right)^2 \\
&\lim_{n\to\infty} x_4^{(n)} = \left(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2\right)^3
\end{aligned}
$$

Из (8) видно, что прообразы точек (0,1,0,0) и (0,0,1,0) являются пустыми множествами, т.е. оператор не является сюрьективным отображением.

Таким образом, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Квадратичные операторы $\tilde{V}_\alpha$, определенные выше, менделевские при $\alpha = 1$ и $n = 1$ или $n = 2$, а при $n = 3$ не являются менделевскими.

Менделевость оператора эквивалентна тому, что, начиная совторого шага, последовательность $x^{(k+1)}$ стабилизируется.

Теорема 2. Для квадратичного оператора $\tilde{V}_\alpha$ при $\alpha = 1$ и $n = 3$, траектория асиптотически стабильна, т.е. $x^{(k)}$ при $k \to \infty$ сходится.

Теорема 3. Квадратичный оператор $\tilde{V}_\alpha$ при $\alpha = 1$ и $n = 1$ сюрьективен, а при $n = 2$ и $n = 3$ не является сюрьективным.

Список литературы

1. Ганиходжаев, Р. Н. (1992). Квадратичные стохастические операторы. Функции Ляпунова и турниры. Математический сборник, 183(8), 119–140.
2. Генетика и наследственность. (1987). Сборник статей. Москва. 300 с.

3. Мейлиев, Х. Ж., Холбеков, Ш. О. (2021). Неподвижные точки квадратичных стохастических операторов на $S^1 \times S^1$. Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 1(10), 1152–1155.

4. Meyliev, K. J., Kholbekov, S. O. (2021). Volterra quadratic stochastic operators of a bisexual population. ACADEMICIA: An International Multidisciplinary Research Journal, 11(5), 56–64.

5. Xolbekov, S. O., Omonova, N. R. (2022). A-analitik funksiyalarning umumlashmasini operatorlar yordamida kiritilishi. Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 2(4), 946–954.

6. Qayumova G. A. Matematika fanini o ‘qitishda talabalarning mustaqil ishlash kompetentsiyani rivojlantirish //Экономика и социум. – 2024. – №. 11-2 (126). – С. 343-348.

7. Qayumova G. RAQAMLASHTIRILGAN MUHITDA MUSTAQIL ISHLASH KOMPETENSIYASINI RIVOJLANTIRISHDA AXBOROT TEXNOLOGIYALARNING O’RNI //Science and innovation. – 2022. – Т. 1. – №. B8. – С. 505-508.

8. Qayumova G. RAQAMLI MUHITDA TA’LIM SIFATINI OSHIRUVCHI OMILLAR //Science and innovation. – 2022. – Т. 1. – №. B5. – С. 289-292.

9. Qayumova G. RAQAMLI MUHITDA TA’LIM SIFATINI OSHIRUVCHI OMILLAR //Science and innovation. – 2022. – Т. 1. – №. B5. – С. 289-292.

10. Abdishukurovna Q. B., Abdushukurovna Q. G. QISQARTIRIB AKS ETTIRISH PRINTSIPINI TADBIQLARI //Лучшие интеллектуальные исследования. – 2026. – Т. 62. – №. 1. – С. 29-35.