



ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ УПРУГОЙ БАЛКИ НА ИЗГИБ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Расулмухамедов Сардорбек Лазизугли

Аннотация

Рассмотрена задача решения задач равномерного изгиба методом конечных разностей. Значения функции изгиба в узловых точках балки изучались с помощью системы линейных алгебраических уравнений. Определены прогиб и изгибающий момент балки. Изгибающий момент зависит от жесткости балки при изгибе, ее ширины и свойств основания. В статье рассмотрены два случая нагружения (общая нагрузка и нагрузка с краев), а также два случая крепления (жесткие опоры на краях и шарнирные опоры).

Ключевые слова: гибкая балка, изгиб, гибкое основание, метод конечных разностей, метод сеток.

Введение.

Существует множество научных работ, посвященных расчету конструкций, лежащих на гибком основании [1–4]. Современные методы исследования основаны как на численных, так и на аналитических методах расчета при проектировании фундаментных плит и дорожных покрытий. Вопросы применения метода конечных разностей к расчетам балок, пластин и оболочек исследовали многие ученые, такие как А. В. Александров, Н. П. Абаровский, М. А. Колтунов, С. П. Тимошенко, П. М. Варвак.



посвятили [1–8]. Большое преимущество метода конечных разностей заключается в том, что он мало зависит от граничных условий и начального напряженного состояния. Одним из недостатков является высокий порядок системы алгебраических уравнений, но современные программные комплексы устраняют эту проблему. Такие задачи встречаются при проектировании плитных фундаментов, полов сооружений, покрытий аэродромов и дорог. Вопросы изгиба балки, лежащей на гибком основании, имеют большое практическое значение при проектировании конструкций сооружений.

Рассмотрим положение равномерно нагруженной балки-ленты, подвергшейся равномерному изгибу, жестко или шарнирно закрепленной по краям, опирающейся по всей ширине на упругое основание. Вырезаем из пластины балку-ленту и рассматриваем ее как балку на упругом основании. При этом считается, что балка-лента уложена на "постель" с упругой средой, способной сопротивляться силам, действующим вниз и вверх. В данном случае анализируем изгиб равномерно нагруженной прямоугольной длинной пластины, опирающейся по всей ширине на упругое основание и имеющей жесткие или шарнирно закрепленные края (рис. 1).

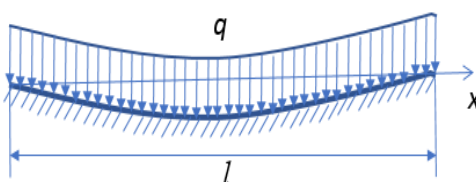


Рисунок 1. Прямоугольная балка-лента на упругом основании, равномерно нагруженная по всей длине и с жестким или шарнирным креплением краев.

Дифференциальное уравнение имеет вид [1,2]:



$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q - kw. \quad (1)$$

Здесь

D - цилиндрическая жесткость балки-ленты, k -коэффициент упругого основания, q -интенсивность равномерно распределенной нагрузки.

Возьмем сначала формулы, позволяющие выразить производную функции через отношение конечных величин. При этом, используя формулу Тейлора, приближенно вычисляем производные функции в произвольной точке m балки-ленты (рис. 2).

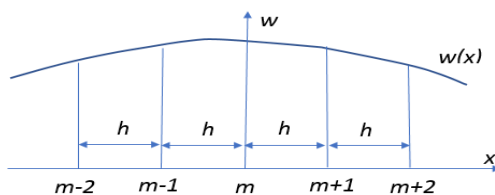


Рисунок 2. Схема деления функции изгиба балки-ленты

При этом точку m будем называть центральной точкой, а ближайшие к ней точки будем считать равноудаленными. Используя формулу Тейлора, получим первые три члена:

$$\begin{cases} w_{i+1} \approx w_i + h * w'_i + \frac{h^2}{2} * w''_i; \\ w_{i-1} \approx w_i - h * w'_i + \frac{h^2}{2} * w''_i; \end{cases} \quad (2)$$

Вычитая и складывая, мы получаем:

$$\begin{cases} w_{i+1} - w_{i-1} = 2h * w'; \\ w_{i+1} + w_{i-1} = 2w_i + h^2 * w''_i; \end{cases} \quad (3)$$

От:



$$w_i' = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \quad (4)$$

$$w_i'' = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} \quad (5)$$

Из выражения (5) второй производной получаем производную по формуле (4) первой производной:

$$w_i''' = \frac{w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2}}{2h^3} \quad (6)$$

Аналогично получим производную четвертого порядка:

$$w_i^{IV} = \frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{h^4} \quad (7)$$

Выделяя элементарную часть балки-ленты, разделим ее на конечные части равной длины:

$$h = \Delta_x = \frac{L}{2} * \frac{1}{n} = \frac{L}{2n} \quad (8)$$

Здесь L — длина балки-ленты; n - число делений по полудлине. Нумерация частей с учетом симметрии показана на рисунке 3.

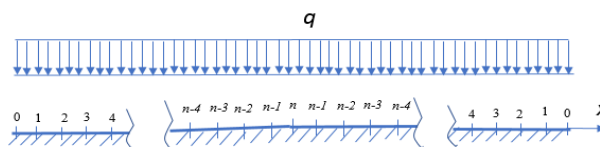


Рисунок 3. Симметричная нумерация частей балки-ленты на упругом основании, равномерно загруженной и с жестким или шарнирно закрепленным краем

Вид четвертой производной в точке i методом конечных разностей:



$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{\Delta_x^4} \quad (9)$$

Подставляя это в уравнение (1), мы получаем следующее уравнение для точки m :

$$\frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{\Delta_x^4} + \frac{k}{D} w_i = \frac{q_i}{D} \quad (10)$$

Или:

$$w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2} + \frac{k\Delta_x^4}{D} w_i = \frac{q_i\Delta_x^4}{D}. \quad (11)$$

здесь $i=1,2,\dots,n$.

Введем обозначения:

$$\alpha = \frac{k\Delta_x^4}{D}, \quad \delta_i = \frac{q_i\Delta_x^4}{D} \quad (12)$$

Тогда (11) примет вид:

$$w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2} + \alpha w_i = \delta_i \quad (13)$$

Если оба конца балки-ленты соединены шарниром, то граничные условия:

$$x = \pm \frac{a}{2} < 1; w=0; Mx=0.$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \text{ Это следует из условия } Mx=0.$$

$w_{-1} = w_1 w_i$ В методе конечных разностей это условие выражается следующим образом. Если мы составим уравнения (13) для внутренних точек и с учетом граничных условий, то коэффициенты системы алгебраических



уравнений порядка $n \times n$ для определения прогибов в программе будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 A_i &= (i == 0 || i == 1 || i == n) ? 0 : 1; \\
 B_i &= (i == 0 || i == n) ? 0 : 4; \\
 C_i &= (i == 0 || i == 1 || i == n) ? 1 : \\
 & (i == 1 || i == n - 1) ? 7.0 + K : 6.0 + K; \\
 D_i &= (i == 0 || i == n) ? 0 : 4; \\
 E_i &= (i == 0 || i == n - 1 || i == n) ? 0 : 1 \\
 f_i &= (i == 1 || i == n) ? 0 : q_x * \left(\frac{l_x}{n}\right)^4 - \\
 & (b * h_b * h_b * h_b / 12 * E);
 \end{aligned}$$

(14)

Вышеуказанное уравнение (14) записывается в виде матриц следующим образом:

$$A \mathbf{W} = \mathbf{B},$$

где A - матрица коэффициентов; \mathbf{W} - вектор-столбец прогибов; \mathbf{B} — столбец свободных членов.

Матрица A принимает вид:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Векторы-столбцы \mathbf{W} и \mathbf{B} :



$$\left. \begin{aligned} w^T &= [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_{n-1} \quad w_n] \\ B^T &= \frac{1}{D} [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \dots \quad \delta_{n-1} \quad \delta_n] \end{aligned} \right\} (16)$$

$w = \frac{1}{D} A^{-1} B R$ Решая данную систему уравнений, определяем значения прогибов в заданных точках балки-ленты.

Изгибающий момент для цилиндрического изгиба определяется следующим образом:

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2}.$$

Запишем вторую производную в виде конечных разностей:

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)_m = \frac{w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}}{\Delta^2}. \quad (17)$$

Определение изгибающего момента для точки m :

$$M_{x(m)} = -D \cdot \frac{w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}}{\Delta^2}. \quad (18)$$

Рассчитываем прогиб балки-ленты при следующих числовых значениях:

$E=2,1 \cdot 10^8$ кН/м², $\nu=0.3$, $k_f=3,75 \cdot 10^4$ кН/м³, $l=10$ м, $h_b=0,3$ м, $q=1$ кН/м.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad J = \frac{h^3}{12}.$$

	W	G
1	0.0000000	0.0000000
2	-0.0000119	0.0000000
3	-0.0000237	0.0000000
4	-0.0000354	0.0000000
5	-0.0000471	0.0000000
6	-0.0000588	0.0000000
7	-0.0000705	0.0000000
8	-0.0000822	0.0000000
9	-0.0000939	0.0000000
10	-0.0001056	0.0000000
11	-0.0001173	0.0000000
12	-0.0001290	0.0000000
13	-0.0001407	0.0000000
14	-0.0001524	0.0000000
15	-0.0001641	0.0000000
16	-0.0001758	0.0000000
17	-0.0001875	0.0000000
18	-0.0001992	0.0000000
19	-0.0002109	0.0000000
20	0.0000000	0.0000000

В таблице 1 приведены значения перемещения W (0.5L) при $x= 0.5L$ в столбце 2 и аналитическое решение перемещения в столбце 3 в результате



численного метода при $n=20, 40, 80, 160, 320$ количестве узловых точек в интервале метода конечных разностей. При их сравнении показано, что с увеличением количества узловых точек n количество достоверных значений решения аналитического и численного методов будет равно четырем.

Таблица 1

Число узлов n	Решение численным методом - $W(0.5L)$	Аналитическое решение- $W(0.5L)$
20.	-0,000281085	-0,0002756
40	-0,000276951	-0,0002756
80	-0,000275918	-0,0002756
160	-0,000275659	-0,0002756
320	-0,000275595	-0,0002756

В таблице 2 показано, что при количестве узловых точек в интервале метода конечных разностей $n=20, 40, 80, 160, 320$, а коэффициент упругой основы балки-ремешка принимает значение $k_r=3,75 \cdot 10^4$, в столбце 2 показано приближение значения $W(0.5L)$, полученного в результате численного метода. При их сравнении видно, что при увеличении числа узловых точек n количество достоверных значений будет равно четырем.

Таблица 2.

Число узлов n	Решение численным методом - $W(0.5L)$
20.	-0,000028574434
40	-0,000028625753
80	-0,000028638811
160	-0,000028642090

320	-0,000028642911
-----	-----------------

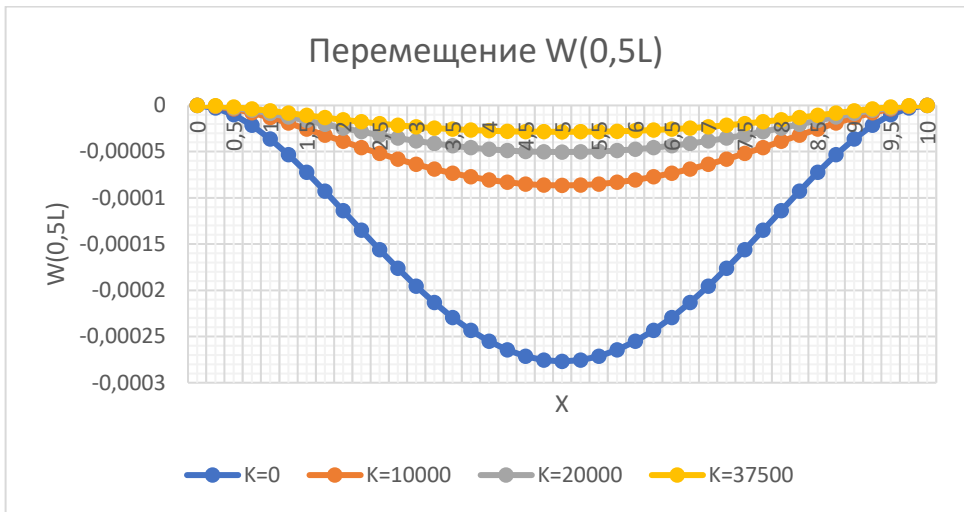


Рисунок 4. График перемещения ленты под воздействием матраса и без него.

На рисунке 4 $x=0; 0,25 \text{ м}; 0,5 \text{ м}; \dots; 9,25 \text{ м}; 9,5 \text{ м}; 9,75 \text{ м}$; Приведен график значений перемещения $W(x)$ при значениях $10,0 \text{ м}$. Из указанного рисунка видно, что $W(x)$ достигает максимального значения в центре, т.е. при $x=0,5L$, и график решения принимает параболический вид, а в узловых точках $x=0$ и $x=L$ $W(x)$ равен нулю. Максимальное значение $W(x)$ уменьшается по мере увеличения значения K влияния полотна ремня.

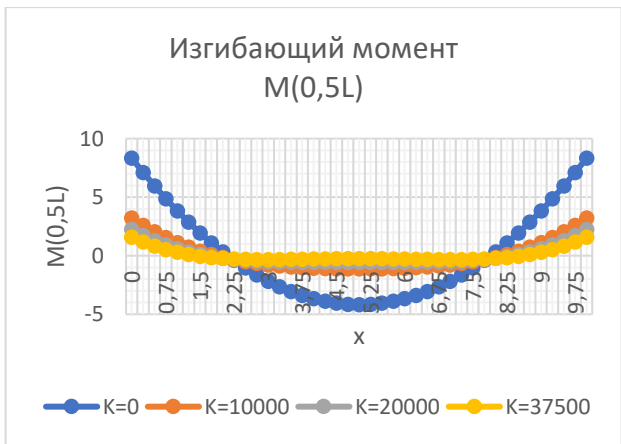




Рисунок 5. График изгибающего момента ремня при действии матраса и без него

На рис. 5 $x=0; 0,25$ м; $0,5$ м;..... $9,25$ м; $9,5$ м; $9,75$ м; Приведен график значений момента $M(x)$ при значениях $10,0$ м. Из указанного рисунка видно, что $M(x)$ достигает экстремального значения в центре, т.е. при $x=0,5L$, и график решения принимает параболический вид, и в узловых точках $x=0$ и $x=L$ $M(x)$ имеет наибольшее значение. Максимальное значение $M(x)$ уменьшается с увеличением величины воздействия полотна ремня.

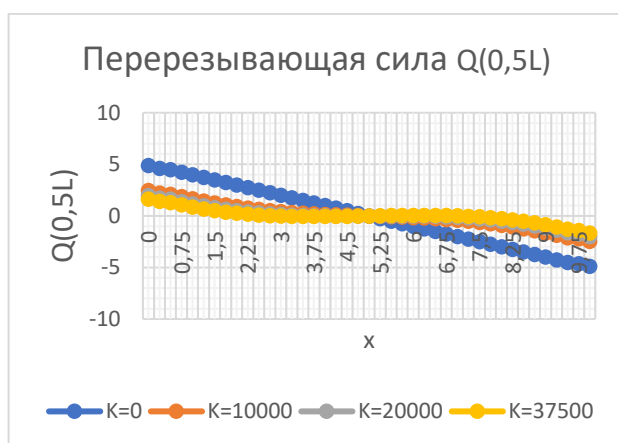


Рисунок 6. График режущей силы ремня при действии матраса и без него

На рисунке 6 $x=0; 0,25$ м; $0,5$ м;..... $9,25$ м; $9,5$ м; $9,75$ м; Приведен график значений перерезывающей силы $Q(x)$ при значениях $10,0$ м. Из указанного рисунка видно, что $Q(x)$ достигает нулевого значения в центре, т.е. при $x=0,5L$, и решение принимает прямолинейный вид и при $x=0$ $Q(x)$ имеет положительное максимальное значение, а в узловых точках $x=L$ $Q(x)$ имеет отрицательное максимальное значение. Максимальное значение $Q(x)$ уменьшается по мере увеличения величины воздействия полотна ремня.

Заключение:

Проанализирована задача численного расчета изгиба упругой балки методом конечных разностей, показана эффективность и возможности



применения данного подхода. Результаты исследования показывают, что метод конечных разностей является одним из удобных и точных методов приближенного решения дифференциальных уравнений. С его помощью можно определить изгиб балки при различных нагрузках и получить достоверные результаты с учетом граничных условий.

Также было отмечено, что численные методы имеют важное значение в тех случаях, когда традиционные аналитические решения трудны или невозможны. Метод конечных разностей имеет простой алгоритм и легко реализуется на компьютере, что позволяет широко применять его в инженерных задачах. Полученные результаты показали, что точность данного метода достаточно высока и может быть эффективно применена на практике.

В заключение можно сказать, что метод конечных разностей является надежным, эффективным и практически значимым инструментом при анализе изгиба упругих балок.

Использованная литература:

1. Тимошенко С. П., Колебания в инженерном деле. - М.: Наука, 1967.
 - Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. Изд-во Лан, 2005.
 3. Тимошенко С. П., Гудер Дж. Теория упругости. - М.: Наука, 1975. — 576 с.
 4. Оболочки и пластины: Учебное пособие для механико-математических факультетов университетов / П. М. Огибалов, М. А. Колтунов. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. - 695 с.: ил.; 27 см. 2.
 5. Варвак П.М., Варвак Л.П. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. М.: Стройиздат, 1977. - 154 с.
- Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. Учебное пособие. - М.: Наука, 1977. — 440 с., ил.



7. Алексеев Г.В. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. Учебное пособие. — Владивосток: ДВФУ, 2010. — 120 с.

8. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Лекции по теории упругости Изд. стереотип. 2020. 208 с. Серия: Классический учебник MGU