МЕТОД ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

Хайитова Хилола Гафуровна-*Преподаватель кафедры «Математического анализа», Бухарского государственного университета,*

email: x.xayitova@mail.ru

Аннотация. В данной статье классическая теория интегральных уравнений изложена для одномерных уравнений Фредгольма в классе непрерывных функций. Затем эта теория была применена к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Вполне непрерывный оператор в классе квадратично суммируемых функций можно представить как сумму вырожденного оператора и оператора, достаточно малого по норме.

Ключевые слова: *линейным интегральным уравнением, ядро, неоднородным, однородным, полное метрическое пространство.*

METHOD OF DETERMINANTS IN FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS

Khaitova Khilola Gafurovna *- teacher of the Department of Mathematical Analysis, Bukhara State University,*

Mail: x.xayitova@mail.ru

Annotation. In this article, the classical theory of integral equations is presented for one-dimensional Fredholm equations in the class of continuous functions. Then, this theory is applied to Fredholm integral equations of the second kind. A completely continuous operator in the class of square-integrable functions

can be represented as the sum of a degenerate operator and an operator that is sufficiently small with respect to the norm.

Key words: *linear integral equation, kernel, homogeneous, non-homogeneous, complete metric space.*

Интегральное уравнение вида

$$\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)dt = f(x).$$

не содержащее искомой функции $\varphi(x)$ вне интеграла, называется интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода.

Линейным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода называется уравнение вида

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)dt = f(x), \qquad (1)$$

где $\varphi(x)$ —неизвестная функция, $K(x,t)$ и $f(x)$ —известные функции, x и t —действительные переменные, изменяющиеся в интервале (a,b), λ —числовой множитель.

Функция $K(x,t)$ называется ядром интегрального уравнения (1); предполагается, что ядро $K(x,t)$ определено в квадрате $\Omega\ \{a \le x \le b,\ a \le t \le b\}$ на плоскости (x,t) и непрерывно в Ω, либо его разрывы таковы, что двойной интеграл

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2 dxdt$$

имеет конечное значение.

Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (1) называется неоднородным; если же $f(x) = 0$, то уравнение (1) принимает вид

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)dt = 0 \qquad (2)$$

и называется однородным.

Решение уравнения Фредгольма 2-го рода дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda)\,f(t)dt, \qquad (3)$$

где функция $R(x,t;\lambda)$, называемая резольвентой Фредгольма уравнения (1), определяется равенством

$$R(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} \qquad (4)$$

при условии, что $D(\lambda) \neq 0$. Здесь $D(x,t;\lambda)$ и $D(\lambda)$ −степенные ряды по λ:

$$D(x,t;\lambda) = K(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x,t)\,\lambda^n, \qquad (5)$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n\,\lambda^n, \qquad (6)$$

коэффициенты которых определяются формулами

$$B_n(x,t) = \int_a^b \dots . \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) & \dots & K(x,t_n) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & \dots & K(t_1,t_n) \\ \dots & \dots & \dots & K(t_2,t_n) \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \dots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 \dots . . dt_n \qquad (7)$$

причем

$$B_0(x,t) = K(x,t).$$

Функция $D(x,t;\lambda)$ называется минором Фредгольма, а $D(\lambda)$ −определителем Фредгольма. В случае, когда ядро $K(x,t)$ ограничено или же интеграл

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt$$

имеет конечное значение, ряды (5) и (6) сходятся для всех значений λ и значит, являются целыми аналитическими функциями от λ.

Резольвента

$$R(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$$

есть аналитическая функция от λ, кроме тех значений λ, которые являются нулями функции $D(\lambda)$. Последние суть полюсы резольвенты $R(x,t;\lambda)$.

Пример. С помощью определителей Фредгольма найти резольвенту ядра $K(x,t)=xe^t; a=0, b=1$.

Решение. Имеем $B_0(x,t)=xe^t$. Далее,

$$B_1(x,t)=\int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} \end{vmatrix} dt_1=0,$$

$$B_2(x,t)=\int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^t & t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1dt_2=0,$$

так как определители под знаком интеграла равны нулю. Очевидно, что и все последующие $B_n(x,t)=0$. Находим коэффициенты C_n:

$$C_1=\int_0^1 K(t_1,t_1)dt_1=\int_0^1 t_1e^{t_1}dt_1=1,$$

$$C_2=\int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1dt_2=0.$$

Очевидно, что и все последующие $C_n=0$.

Согласно формулам (5) и (6) в нашем случае имеем

$$D(x,t;\lambda)=K(x,t)=xe^t; \quad D(\lambda)=1-\lambda.$$

Таким образом,

$$R(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}=\frac{xe^t}{1-\lambda}.$$

Применим полученный результат к решению интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b xe^t \varphi(t)dt = f(x) \quad (\lambda \neq 1).$$

Согласно формуле (2)

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{xe^t}{1-\lambda} f(t)dt.$$

В частности, для $f(x) = e^{-x}$ получаем

$$\varphi(x) = e^{-x} + \frac{\lambda}{1-\lambda} x.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хайитова Х.Г. Использование эвристического метода при объяснении темы «Непрерывные линейные операторы» по предмету «Функциональный анализ» // Вестник науки и образования. 94:16 (2020), часть 2. С. 25-28.
2. Хайитова Х.Г., Рустамова Б.И. Метод обобщения при обучении математике в школе // Проблемы педагогики 51:6 (2020). С. 45-48.
3. X.G‘.Xayitova Oliy ta'lim muassasalarida "Funksional analiz" fanini o'qitishda muammoli ta'lim metodida foydalanish // Современная психология и педагогика: проблемы, анализ и результаты, 227-230.
4. K.Khayitova The domain of convergence of the double degree seriers of several variables of the complex numbers // Journal of Global Research in Mathematical Archives 6:11(2019), 55-57.
5. X.G‘.Xayitova O'rta maktab matematika kursida tub va murakkab sonlari o'qitishda taqqoslash metodidan foydalanish // Pedagogik mahorat. 5-son 2019-yil, 139-141.
6. X.G‘.Xayitova O'rta maktabda matematika fanini o'qitishda umumlashtirish metodining afzalliklari // Pedagogik mahorat. 5-son 2020-yil, 122-1241.

7. Хайитова Х.Г. Преимущества использовании метода анализа при изучении темы «Непрерывные функции» по предмету «Математический анализ» // Проблемы педагогики, 2021 № 2(53). С. 46-49.
8. Xayitova X.G., Ramazonova Sh.Sh., Panjaradagi ikki o'lchamli qo'zg'alishga ega bilaplasian operatorining spektri va rezolventasi. Science and education. Vol. 3 No. 3 (2022), 55-64.
9. Хайитова Х.Г., О числе собственных значений модели Фридрихса с двухмерным возмущением. Наука, техника и образование. 2020. № 8 (72), 5-8.
10. Хайитова Х.Г., «Преимущества использования метода научного исследования при решении задач комбинаторики» Научный импульс №10(100). Часть 2, Москва 2023 г.