АЛЬТЕРНАТИВА ФРЕДГОЛЬМА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Хайитова Хилола Гафуровна-*Преподаватель кафедры «Математического анализа», Бухарского государственного университета,*

email: x.xayitova@mail.ru

Аннотация. В данной статье представлены одно из основных понятий дифференциального исчисления — линейные интегральные уравнения, а также некоторые методы их решения. Рассматриваются также методы решения интегральных уравнений типов Фредгольма и Вольтерры. Анализируется теорема Фредгольма и её приложения.

Ключевые слова: *интегральное уравнение, ядро, симметричная функция, линейное пространство.*

FREDHOLM ALTERNATIVE AND ITS APPLICATIONS

Khaitova Khilola Gafurovna - *teacher of the Department of Mathematical Analysis, Bukhara State University,*

email: x.xayitova@mail.ru

Annotation. This article presents one of the fundamental concepts of differential calculus—linear integral equations—as well as some methods for solving them. Methods for solving Fredholm- and Volterra-type integral equations are also considered. Fredholm's theorem and its applications are analyzed.

Key words: *integral equation, kernel, symmetric function, linear space.*

Для интегральных уравнений Фредгольма имеют место теоремы:

Теорема 1 (альтернатива Фредгольма). Или неоднородное линейное уравнение 2-го рода

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt=f(x) \tag{1}$$

имеет единственное решение при любой функции $f(x)$ (из некоторого достаточно широкого класса), или соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \qquad (2)$$

имеет по крайней мере одно нетривиальное, т.е. не равное тождественно нулю, решение.

Теорема 1. Если для уравнения (1) имеет место первый случай альтернативы, то он имеет место и для сопряженного уравнения

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\psi(t)dt = g(x). \qquad (3)$$

Однородное интегральное уравнение (2) и сопряженное к нему уравнение

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\psi(t)dt = 0 \qquad (4)$$

имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.

Замечание. Если функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x)$ являются решениями однородного уравнения (2), то их линейная комбинация

$$\varphi(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + C_3\varphi_3(x) + \dots + C_n\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k\varphi_k(x),$$

где $C_k\ (k = 1,2,3,\dots,n)$ −произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

Теорема 3. Необходимым и достаточным условием существования решения $\varphi(x)$ неоднородного уравнения (1) во втором случае альтернативы является условие ортогональности правой части этого уравнения, т.е. функции $f(x)$, к любому решению $\psi(x)$ сопряженного к уравнению (2) однородного уравнения (4):

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)dx = 0. \tag{5}$$

Замечание. При выполнении условия (5) уравнение (1) будет иметь бесконечное множество решений, так как этому уравнению будет удовлетворять любая функция вида $\varphi(x)+\widetilde{\varphi(x)}$, где $\varphi(x)$ −какое-нибудь решение уравнения (1), $\check{\varphi}(x)-$ любое решение соответствующего однородного уравнения (2). Кроме того, если уравнению (1) удовлетворяют функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, то в силу линейности уравнения их разность $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$ есть решение соответствующего однородного уравнения (2).

На практике особенно важное значение имеет альтернатива Фредгольма. Вместо того чтобы доказывать, что данное интегральное уравнение (1) имеет решение, часто бывает проще доказать, что соответствующее однородное уравнение (2) или сопряженное к нему уравнение (4) имеют только тривиальные решения. Отсюда в силу альтернатива следует, что уравнение (1) действительно имеет решение.

Замечания. 1) Если ядро $K(x,t)$ интегрального уравнения (1) симметрично, т.е.

$$K(x,t)=K(t,x),$$

то однородное сопряжением (2), соответствующим уравнению (1).

2) В случае неоднородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n}a_k(x)b_k(t)\right]\varphi(t)dt=f(x)$$

условие (5) ортогональности правой части этого уравнения дает n равенств

$$\int_a^b f(t)\,b_k(t)dt=0 \quad (k=1,2,..,n).$$

Пример.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (5x^2 - 3)t^2\, \varphi(t)dt = e^x.$$

Решение. Имеем

$$\varphi(x) = C\lambda(5x^2 - 3) + e^x, \tag{6}$$

где

$$C = \int_0^1 t^2\, \varphi(t)dt. \tag{7}$$

Подставляя (6) и (7), получим

$$C = C\lambda \int_0^1 (5t^4 - 3t^2)\, dt\ + \int_0^1 t^2\, e^t dt,$$

откуда

$$C = e - 2.$$

Данное уравнение при любых λ имеет единственное решение

$$\varphi(x) = \lambda(e-2)(5x^2 - 3) + e^x,$$

а соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (5x^2 - 3)t^2\, \varphi(t)dt = 0$$

имеет единственное нулевое решение: $\varphi(x) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хайитова Х.Г. Использование эвристического метода при объяснении темы «Непрерывные линейные операторы» по предмету «Функциональный анализ» // Вестник науки и образования. 94:16 (2020), часть 2. С. 25-28.
2. Хайитова Х.Г., Рустамова Б.И. Метод обобщения при обучении математике в школе // Проблемы педагогики 51:6 (2020). С. 45-48.

3. X.G‘.Xayitova Oliy ta'lim muassasalarida "Funksional analiz" fanini o'qitishda muammoli ta'lim metodida foydalanish // Современная психология и педагогика: проблемы, анализ и результаты, 227-230.
4. K.Khayitova The domain of convergence of the double degree seriers of several variables of the complex numbers // Journal of Global Research in Mathematical Archives 6:11(2019), 55-57.
5. X.G‘.Xayitova O'rta maktab matematika kursida tub va murakkab sonlari o'qitishda taqqoslash metodidan foydalanish // Pedagogik mahorat. 5-son 2019-yil, 139-141.
6. X.G‘.Xayitova O'rta maktabda matematika fanini o'qitishda umumlashtirish metodining afzalliklari // Pedagogik mahorat. 5-son 2020-yil, 122-1241.
7. Хайитова Х.Г. Преимущества использовании метода анализа при изучении темы «Непрерывные функции» по предмету «Математический анализ» // Проблемы педагогики, 2021 № 2(53). С. 46-49.
8. Xayitova X.G., Ramazonova Sh.Sh., Panjaradagi ikki o’lchamli qo’zg’alishga ega bilaplasian operatorining spektri va rezolventasi. Science and education. Vol. 3 No. 3 (2022), 55-64.
9. Хайитова Х.Г., О числе собственных значений модели Фридрихса с двухмерным возмущением. Наука, техника и образование. 2020. № 8 (72), 5-8.
10. Хайитова Х.Г., «Преимущества использования метода научного исследования при решении задач комбинаторики» Научный импульс №10(100). Часть 2, Москва 2023 г.