

**KOMPLEKS CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMA YECHIMLARI.**

ATMU matematika kafedrası dotsenti, E.Sharipov

ATMU matematika yo‘nalishi II-kurs magistranti, S.Nashvandov

Anatatsiya. kompleks funksiyalar nazariyasi asosida chiziqli differensial tenglamalarning tuzilishi, yechimlarning mavjudlik va yagonalik shartlari, shuningdek, analitik yechimlarni topish metodlari tahlil qilinadi. Tadqiqot davomida bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan kompleks chiziqli differensial tenglamalarni yechishning klassik usullari, jumladan, xarakteristik tenglama, variatsiya usulidan foydalaniladi.

Kalit so‘zlar. Tenglama, kompleks, haqiqiy, funksiya, koefitsient, algebraik, argument, algebraik.

Ushbu maqolada o‘zgaruvchi koefitsientli chiziqli tenglamalarni o‘rganilgan. Koefitsientlari haqiqiy va kompleks funksiyalar bo‘lgan haqiqiy va kompleks chiziqli differensial tenglamalarning kompleks yechimlarini topish masalasi ko‘rilgan. Differensial tenglamalar matematik analizning muhim bo‘limlaridan biri bo‘lib, tabiatshunoslik, fizika, mexanika, elektrotexnika, kvant nazariyasi va muhandislik masalalarini modellashtirishda keng qo‘llaniladi. Ayniqsa, kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi bilan bog‘liq bo‘lgan kompleks chiziqli differensial tenglamalar zamonaviy matematikaning dolzarb yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi. Bunday tenglamalar yordamida tebranish jarayonlari, elektr zanjirlaridagi murakkab signallar, kvant holatlarining o‘zgarishi kabi ko‘plab amaliy masalalarni ifodalash mumkin.

Agar I da $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda $\chi(t)$ funksiya ham I da differensiallanuvchi deyiladi va $\dot{\chi}(t) = \dot{\varphi}(t) + i\dot{\psi}(t)$ deb hisoblanadi.



Ma'lumki, $\frac{dy}{dx} = p$ belgilashda y -noma'lum haqiqiy funksiya edi. Endi haqiqiy argumentni t desak, $z(t) = x(t) + iy(t)$ kompleks funksiyani qarab quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$pz = \frac{d}{dt} z \text{ funksiyadan } t \text{ bo'yicha olingan hosila;}$$

$$\frac{d}{dt} = p \text{ differensiyallash operatori; xuddi shunday}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \right) = p^2, \frac{d^3}{dt^3} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2}{dt^2} \right) = p^3, \dots, \frac{d^k}{dt^k} = p^k \text{ belgilash kiritsak,}$$

$$\frac{dz}{dt} = pz, \frac{d^2 z}{dt^2} = p^2 z, \dots, \frac{d^k z}{dt^k} = p^k z \text{ munosabatlardan}$$

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{z} + a_n z = 0 \quad (1)$$

tenglamani chap tomonidan

$$L(z) = z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{z} + a_n z = p^n z + a_1 p^{n-1} z + \dots +$$

$$a_{n-1} pz + a_n z = (p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) \cdot z = L(p) \cdot z = 0 \quad (1')$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu yerda $a_i = \text{const}$ bo'lsa, $L(p) - n$ -tartibli algebraik ko'phad.

Lemma1. Agar λ son $L(\lambda) = 0$ bo'lsa, $Z = e^{\lambda t}$ funksiya (1') tenglamani yechimi bo'ladi.

Haqiqatan,

$$\begin{aligned} pe^{\lambda t} &= \frac{d}{dt} e^{(\mu+iv)t} = \frac{d}{dt} (e^{\mu t}) \cdot e^{ivt} + e^{\mu t} \frac{d}{dt} (e^{ivt}) = \mu e^{\mu t} \cdot e^{iv} + i v e^{\mu t} = \\ &= (\mu + iv) e^{(\mu+iv)t} = \lambda e^{\lambda t} \end{aligned}$$

tenglikdan $p^2 e^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t}$, $p^3 e^{\lambda t} = \lambda^3 e^{\lambda t}$, ..., $p^n e^{\lambda t} = \lambda^n e^{\lambda t}$ munosabatlar kelib chiqadi.

$$\begin{aligned} L(p) \cdot z &= L(p) e^{\lambda z} = p^n e^{\lambda t} + a_1 p^{n-1} e^{\lambda t} + \dots + a_{n-1} p e^{\lambda t} + a_n e^{\lambda t} = \\ &= (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) e^{\lambda t} = L(\lambda) \cdot e^{\lambda t} = 0 \end{aligned}$$

$L(p) = 0$ tenglama (1') tenglamani xarakteristik tenglamasi deyiladi.

$$\text{Ushbu } \dot{z} = v z^2, \quad v = 0 + i, \quad z = x + iy$$

kompleks differensial tenglamani ikki haqiqiy differensial tenglamaga ajrataylik.



$$\dot{x} + i\dot{y} = i(x + iy)^2 = i(x^2 + 2ixy - y^2) = -2xy + i(x^2 - y^2)$$

bu tenglikdan $\dot{x} = -2xy$, $\dot{y} = x^2 - y^2$ ikkita haqiqiy differensial tenglamaga ajratiladi.

Ma'lumki, $L(p)$ ko'phadning ildizlari: $\lambda_i (i = \overline{1, n})$ lar oddiy ildizlar bo'lsa, (1) tenglamaning umumiy yechimi

$$z = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \quad (2)$$

formula bilan ifodalanadi;

Misol 1. Ushbu $\ddot{z} - z = 0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechim. Dastlab umumiy kompleks yechimni topaylik. Xarakteristik tenglama $p^2 - 1 = 0$ ko'rinishida bo'lib, ildizlari $p_1 = -1$, $p_2 = 1$ bo'ladi. Berilgan tenglamaning ixtiyoriy kompleks yechimi

$$z = c^1 e^{-t} + c^2 e^t = (c_1 + ic_2) e^{-t} + (c_3 + ic_4) e^t \quad (c_1, c_2, c_3 \text{ va } c_4 -$$

ixtiyoriy haqiqiy son) ko'rinishida yoziladi.

Misol.2. Ushbu $\ddot{z} + 2\dot{z} + z = 0$ tenglamaning umumiy kompleks va haqiqiy yechimlari topilsin.

Yechim. Xarakteristik tenglama $L(p) = p^3 + 2p^2 + p = 0$ ko'rinishga ega.

Undan $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -1$. Demak, umumiy kompleks yechimi:

$z = c_1 + (c_2 + c_3 t) e^{-t}$ (c_1, c_2, c_3 - kompleks sonlar) $z_1 = 1, z_2 = e^{-t}, z_3 = t e^{-t}$ haqiqiy funksiyalar erkli yechimlari.

Misol 3. Ushbu $z^{(5)} + 2z^{(3)} + \dot{z} = 0$ tenglamaning umumiy kompleks va haqiqiy yechimlari topilsin.

Yechim. Mos xarakteristik tenglama $L(p) = p^5 + 2p^3 + p = 0$ bo'lib,

$p_1 = 0, p_{2,3} = -i, p_{4,5} = i$ ildizlarga mos umumiy kompleks yechimi

$z_1 = 1, z_2 = \cos t, z_3 = t \cos t, z_4 = \sin t$ va $z_5 = t \sin t$ bo'ladi.

Shunday qilib, Kompleks chiziqli differensial tenglamalar nazariyasi murakkab matematik jarayonlarni o'rganishda muhim ahamiyatga ega [6]. Ushbu maqolada kompleks chiziqli differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini topish usullari, xususan xarakteristik tenglama va analitik metodlarning qo'llanilishi



ko‘rib chiqildi[5]. Natijada, kompleks va haqiqiy yechimlar orasidagi bog‘lanish tahlil qilinib, ularni amaliy masalalarda qo‘llash imkoniyatlari yoritildi[4]. Kompleks chiziqli differensial tenglama yechimlari topishda o‘zgaruvchi koefitsientli chiziqli tenglamalarni o‘rganilgan[7]. Koeffitsientlari haqiqiy va kompleks funksiyalar bo‘lgan haqiqiy va kompleks chiziqli differensial tenglamalarning kompleks yechimlarini topish masalasi ko‘rilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Салахитдинов М.С., Насритдинов Г.Н. Одний дифференциал тенгламалар. Тошкент: Укитувчи, 1982, 446 б.
2. Ильяшенко Ю.С., Яковенко С.Ю. Аналитическая теория дифференциальных уравнений. Том 1. — М.: МЦНМО, 2013. — 432 с.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984, 296 с.
4. Abdishukurovna Q. B., Abdushukurovna Q. G. QISQARTIRIB AKS ETTIRISH PRINTSIPINI TADBIQLARI //Лучшие интеллектуальные исследования. – 2026. – Т. 62. – №. 1. – С. 29-35.
5. Abdushukurovna Q. G. et al. BOSHLANG'ICH SINFDA HARAKATGA DOIR MASALALAR USTIDA ISHLASH METODIKASI //TADQIQOTLAR. – 2026. – Т. 85. – №. 4. – С. 280-284.
6. Qayumova G. A. Matematika fanini o‘qitishda talabalarning mustaqil ishlash kompetensiyani rivojlantirish //Экономика и социум. – 2024. – №. 11-2 (126). – С. 343-348.
7. Qayumova G. RAQAMLASHTIRILGAN MUHITDA MUSTAQIL ISHLASH KOMPETENSIYASINI RIVOJLANTIRISHDA AXBOROT TEXNOLOGIYALARNING O‘RNI //Science and innovation. – 2022. – Т. 1. – №. B8. – С. 505-508.