



KVADRATIK STOXYASTIK OPERATORLARNING SYUREKTIVLIK XOSSALARI VA ULARNING SIMPLEKSDAGI GEOMETRIK TASVIRI.

Axborot texnologiyalari va menejment universiteti magistranti,

G.I.Faxritdinova

Annotatsiya. Ushbu maqolada kvadratik stoxastik operatorlarning syurektivlik xossalari va ularning simpleksdagi geometrik tasviri o'rganilgan. Kvadratik stoxastik operatorlarning simpleksdagi akslantirish xususiyatlari tahlil qilinib, syurektiv operatorlarning ichki nuqtalarni ichki nuqtalarga, chegara nuqtalarni esa chegara nuqtalarga o'tkazish xossalari yoritilgan. Shuningdek, operatorlarning geometrik tasviri simpleks va tetraedr modeli asosida ko'rib chiqilgan. Tadqiqot natijalari kvadratik stoxastik operatorlar nazariyasini chuqurroq o'rganish hamda matematik genetika va boshqa amaliy masalalarda qo'llash uchun nazariy asos bo'lib xizmat qiladi.

Kalit so'zlar. Kvadratik stoxastik operator, syurektivlik, simpleks, geometrik tasvir, tetraedr, akslantirish, ichki nuqta, chegara nuqta, matematik genetika, operatorlar nazariyasi.

Kvadratik stoxastik operatorlar nochiziqli operatorlar nazariyasining muhim sinflaridan biri bo'lib, ular matematik genetika, biologiya va populyatsiya dinamikasi masalalarida keng qo'llaniladi. Ushbu operatorlar odatda simpleksda aniqlanadi va ehtimollik taqsimotlarining evolyutsiyasini ifodalaydi. Kvadratik stoxastik operatorlarning muhim xossalardan biri **syurektivlik** bo'lib, u operatorning simpleksdagi har bir nuqtani qamrab olish xususiyatini tavsiflaydi. Bu xossa operatorlarning algebraik va geometrik tuzilishini chuqurroq o'rganishda muhim ahamiyatga ega.



Mazkur maqolaning maqsadi **kvadratik stoxastik operatorlarning syurektivlik xossalarini o'rganish va ularning simpleksdagi geometrik tasvirini tahlil qilishdan iborat**. Shu asosda operatorlarning ichki va chegara nuqtalarga ta'siri matematik jihatdan yoritiladi. Avloddan avlodga o'tish jarayonida matematik genitika masalalarida ko'p uchraydigan kvadratik stoxastik operatorlar sinfi va unga mos keluvchi o'zini o'ziga mos qo'yish gruppasini o'rganish ya'ni, har bir syurektiv kvadratik operatorlar sinfiga bitta o'zini o'ziga mos qo'yish mos kelishini o'rganish maqsadga muvofiqdir.

Tarif. $S^{n-1} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}$ to'plam n -

lo'chovli simpleks deyiladi. S^{n-1} simpleksni o'zini o'ziga o'tkazuvchi quyidagi V operatorga kvadratik stoxastik operator deyiladi.

$$(Vx)_k = x'_k = \sum_{i,j=1}^n P_{ij,k} x_i x_j, k = 1, 2, \dots, n \text{ bu yerda } P_{ij,k} = P_{ji,k}, \sum_{k=1}^n P_{ij,k} = 1 \text{ Biz}$$

bu masalada $n=4$ bo'lgan holni qaraymiz. U holda

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4; \sum_{i=1}^4 x_i = 1\} \text{ simpleksdagi ixtiyoriy stoxastik}$$

kvadratik operator quydagicha beriladi:

$$(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^4 P_{ij,k} x_i x_j, k = 1, 2, 3, 4 \text{ bu yerda } P_{ij,k} \geq 0, P_{ij,k} = P_{ji,k}, \sum_{k=1}^4 P_{ij,k} = 1;$$

Bu operator bilan quyidagi operator bir qiymatli aniqlanadi.

$$\begin{bmatrix} P_{11,1}, P_{22,1}, P_{33,1}, P_{44,1} & P_{12,1}, P_{13,1}, P_{14,1}, P_{23,1}, P_{24,1}, P_{34,1} \\ P_{11,2}, P_{22,2}, P_{33,2}, P_{44,2} & P_{12,2}, P_{13,2}, P_{14,2}, P_{23,2}, P_{24,2}, P_{34,2} \\ P_{11,3}, P_{22,3}, P_{33,3}, P_{44,3} & P_{12,3}, P_{13,3}, P_{14,3}, P_{23,3}, P_{24,3}, P_{34,3} \\ P_{11,4}, P_{22,4}, P_{33,4}, P_{44,4} & P_{12,4}, P_{13,4}, P_{14,4}, P_{23,4}, P_{24,4}, P_{34,4} \end{bmatrix}$$



Bu yerda $0 \leq P_{ij,k} \leq 1; i, j, k = 1, 2, 3, 4.$

Biz 24 ta syurektiv kvadratik operator sinfini aniqlaymiz va bu sinf operatorlari qolgan hamma syurektiv kvadratik operatorlar o'rnini bosa oladi.[7] Bu kabi operatorlar sinfini tasvirlash uchun o'zini o'ziga mos qo'yadigan ko'pburchaklar gruppasidan foydalanamiz [1].

O'zini o'ziga mos qo'yish deganda metrikani saqlovchi almashtirish tushiniladi. R^3 tetraedrni o'zini o'ziga mos qo'yish gruppasi 12 ta elementdan iborat.

Biz bu masalani R^4 da qarayotganimiz sababli, tetraedrning o'zini o'ziga mos qo'yish gruppasi R^4 da bu tetraedrning hamma uchlarini to'liq o'rin almashtirishlardan iborat, yani $G = \{\pi_i\}_{i=1}^{24}$ Ixtiyoriy syurektiv kvadratik operatorga qaysidir o'zini o'ziga mos qo'yish π_i ga mos kelishini isbotlaymiz.

Teorema: S^3 da aniqlangan syurektiv kvadratik operator o'zini o'ziga mos qo'yish $\pi_i, i = \overline{1, 24}$ ga mos keladi.

Isbot. Bu teoremani isboti quyidagi 3 ta lemmadan kelib chiqadi;

Lemma1. V-syuriktiv kvadratik operator bo'lsin.

U holda S^3 -simpleksning hech bir ichki nuqtasi V akslantirish ta'sirida simpleksning uchidagi nuqtaga o'tmaydi.

Isbot: Teskarisidan faraz qilaylik $A = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Int}S^3$ va $V(A) = A_i, i = 1, 2, 3, 4.$

bo'lsin, bu yerda A_i simpleksni uchidagi nuqta $i = 1$ uchun qaraymiz (qolgan hollar xuddi shunday isbotlanadi).

$V(A) = A_i$ tenglikdan quyidagilar kelib chiqadi:



$$1 = a_1x_1^2 + b_1x_2^2 + c_1x_3^2 + d_1x_4^2 + 2\alpha_1x_1x_2 + 2\beta_1x_1x_3 + 2\gamma_1x_1x_4 + 2\zeta_1x_2x_3 + 2\eta_1x_2x_4 + 2\delta_1x_3x_4.$$

$$0 = a_2x_2^2 + b_2x_2^2 + c_2x_2^2 + d_2x_4^2 + 2\alpha_2x_1x_2 + 2\beta_2x_1x_3 + 2\gamma_2x_1x_4 + 2\zeta_2x_2x_3 + 2\eta_2x_2x_4 + 2\delta_2x_3x_4$$

$$0 = a_3x_1^2 + b_3x_2^2 + c_3x_2^2 + d_3x_4^2 + 2\alpha_3x_1x_2 + 2\beta_3x_1x_3 + 2\gamma_3x_1x_4 + 2\zeta_3x_2x_3 + 2\eta_3x_2x_4 + 2\delta_3x_3x_4.$$

$$0 = a_4x_1^2 + b_4x_2^2 + c_4x_2^2 + d_4x_4^2 + 2\alpha_4x_1x_2 + 2\beta_4x_1x_3 + 2\gamma_4x_1x_4 + 2\zeta_4x_2x_3 + 2\eta_4x_2x_4 + 2\delta_4x_3x_4$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 > 0 \quad \text{dan} \quad \begin{cases} a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = \alpha_1 = \gamma_1 = \zeta_1 = \eta_1 = \delta_1 = 1 \\ a_i = b_i = c_i = d_i = \alpha_i = \gamma_i = \zeta_i = \eta_i = \delta_i = 0 \end{cases} \quad i = 2, 3, 4$$

bundan ixtiyoriy $A \in S^3$ dan $V(A) = A_1$ yani, $V(S^3) = A_1$ kelib chiqadi. Bu kvadratik operatorning syurektivligiga ziddir.

Lemma2 : V syurektiv kvadratik operator bo'lsin. U holda

S^3 simpleksning har bir ichki nuqtasi V akslantirish ta'sirida simpleksning chegara nuqtalariga o'tmaydi.

Isbot: Teskarisidan faraz qilamiz $A = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Int } S^3$ ya'ni, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 > 0$ aniqlik uchun $V(A) \in [A_3, A_4]$ bo'lsin. U holda

$$x_1' = 0 = a_1x_1^2 + b_1x_2^2 + c_1x_3^2 + d_1x_4^2 + 2\alpha_1x_1x_2 + 2\beta_1x_1x_3 + 2\gamma_1x_1x_4 + 2\zeta_1x_2x_3 + 2\eta_1x_2x_4 + 2\delta_1x_3x_4.$$

$$x_2' = 0 = a_2x_2^2 + b_2x_2^2 + c_2x_2^2 + d_4^2 + 2\alpha_2x_1x_2 + 2\beta_2x_1x_3 + 2\gamma_2x_1x_4 + 2\zeta_2x_2x_3 + 2\eta_2x_2x_4 + 2\delta_2x_3x_4.$$

dan

$$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = \alpha_1 = \gamma_1 = \zeta_1 = \eta_1 = \delta_1 = 0$$

$$a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = \alpha_2 = \gamma_2 = \zeta_2 = \eta_2 = \delta_2 = 0$$

bo'ladi. Bundan ixtiyoriy $A \in S^3$ nuqta uchun $V(A) \in [A_3, A_4]$,

ya'ni, $V(S^3) \subset [A_3, A_4]$ bu V kvadratik operatorning syurektivligiga ziddir.



Lemma3: V syurektiv kvadratik operator bo'lsin. U holda hech bir chegara nuqtasi (simpleksning uchidan boshqa) V akslantirish ta'sirida S^3 simpleksning uchidagi nuqtaga o'tmaydi.

Isbot: $A = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \partial S^3$ $A \neq A_i, i = 1, 2, 3, 4$ va aniqlik uchun $A \in [A_1, A_2]$, $V(A) \neq A_i, i = 1, 2, 3, 4$ ekanligini isbotlashimiz kerak.

Teskarisidan faraz qilaylik, ya'ni $V(A) = A_i$ bo'lsin, u holda

$$1 = a_1x_1^2 + b_1x_2^2 + c_1x_3^2 + d_1x_4^2 + 2\alpha_1x_1x_2 + 2\beta_1x_1x_3 + 2\gamma_1x_1x_4 + 2\zeta_1x_2x_3 + 2\eta_1x_2x_4 + 2\delta_1x_3x_4.$$

$$0 = a_2x_2^2 + b_2x_2^2 + c_2x_2^2 + d_4^2 + 2\alpha_2x_1x_2 + 2\beta_2x_1x_3 + 2\gamma_2x_1x_4 + 2\zeta_2x_2x_3 + 2\eta_2x_2x_4 + 2\delta_2x_3x_4.$$

$$0 = a_4x_1^2 + b_4x_2^2 + c_4x_3^2 + d_4x_4^2 + 2\alpha_4x_1x_2 + 2\beta_4x_1x_3 + 2\gamma_4x_1x_4 + 2\zeta_4x_2x_4 + 2\eta_4x_2x_4 + 2\delta_4x_3x_4$$

bu tengliklardan $a_i = b_i = c_i = d_i = \alpha_i = \gamma_i = \zeta_i = \eta_i = \delta_i = 0, i = 2, 3, 4$

Binobarin ixtiyoriy $A \in [A_1, A_2]$, $V(A) = A_1$ ya'ni, $V([A_1, A_2]) = A_1$

bu esa kvadratik operatorning syurektivligiga ziddir. Shunday qilib syurektiv kvadratik operator simpleksning ichki nuqtasini ichki nuqtasiga, chegara nuqtasini chegara nuqtalariga o'tkazar ekan[6].

Misol. $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ simpleksda quyidagi kvadratik stoxastik operator berilgan bo'lsin, $V(x) = (x_1^2 + 2x_1x_2; x_2^2 + 2x_2x_3; x_3^2 + 2x_1x_3)$. Berilgan $x = (1/2; 1/3; 1/6)$ nuqta uchun operatorning qiymatini toping.

Yechish. Avvalo berilgan nuqtaning simpleksga tegishli ekanligini tekshiramiz. $1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$. Demak, berilgan nuqta simpleksga tegishlidir. Endi operator formulasi bo'yicha koordinatalarni hisoblaymiz.

1) Birinchi koordinata. $V_1 = x_1^2 + 2x_1x_2$. Qiymatlarni qo'yamiz:

$$V_1 = (1/2)^2 + 2 \cdot (1/2) \cdot (1/3)$$



Hisoblaymiz. $V_1 = 1/4 + 1/3$. Umumiy maxrajga keltiramiz. $V_1 = 3/12 + 4/12$
 $V_1 = 7/12$. Demak, operatorning birinchi koordinatasi $7/12$ ga teng.

2) Ikkinchi koordinata. $V_2 = x_2^2 + 2x_2x_3$. Qiymatlarni qo'yamiz.

$$V_2 = (1/3)^2 + 2 \cdot (1/3) \cdot (1/6).$$

Hisoblaymiz. $V_2 = 1/9 + 1/9$, $V_2 = 2/9$. Demak, operatorning ikkinchi koordinatasi $2/9$ ga teng.

3) Uchinchi koordinata. $V_3 = x_3^2 + 2x_1x_3$. Qiymatlarni qo'yamiz.

$$V_3 = (1/6)^2 + 2 \cdot (1/2) \cdot (1/6)$$

Hisoblaymiz. $V_3 = 1/36 + 1/6$. Umumiy maxrajga keltiramiz. $V_3 = 1/36 + 6/36$
 $V_3 = 7/36$. Demak, operatorning uchinchi koordinatasi $7/36$ ga teng.

Natija. $V(x) = (7/12 ; 2/9 ; 7/36)$. Endi tekshiramiz:

$7/12 + 2/9 + 7/36 = 21/36 + 8/36 + 7/36 = 36/36 = 1$. Demak, hosil bo'lgan nuqta ham simpleksga tegishlidir[9]. Bu misoldan ko'rinadiki, kvadratik stoxastik operator simpleksdagi nuqtani yana simpleksdagi nuqtaga akslantiradi. Bu esa operatorning stoxastik xossasini va simpleksni saqlab qolish xususiyatini ko'rsatadi.

Ushbu maqolada kvadratik stoxastik operatorlarning syurektivlik xossalari va ularning simpleksdagi geometrik tasviri o'rganildi[8]. Tadqiqot natijasida syurektiv operatorlarning simpleksning ichki nuqtalarini ichki nuqtalarga, chegara nuqtalarini esa chegara nuqtalarga akslantirishi ko'rsatildi. Shuningdek, operatorlarning geometrik xossalari tahlil qilish ularning matematik tabiatini chuqurroq tushunishga imkon berishi aniqlandi[5]. Olingan natijalar kvadratik stoxastik operatorlar nazariyasini rivojlantirishda muhim ahamiyatga ega.



Foydalanilgan adabiyotlar

1. Ganikhodjaev N.N., Rozikov U.A. *Quadratic Stochastic Operators: Results and Open Problems*. – Tashkent: Fan, 2011. – 240 p.
2. Lyubich Yu.I. *Mathematical Structures in Population Genetics*. – Berlin: Springer-Verlag, 1992. – 305 p.
3. Bernstein S.N. *The Solution of a Mathematical Problem Related to the Theory of Heredity*. – Annals of Mathematical Statistics, 1924. – Vol. 13. – P. 53–61.
4. Kesten H. *Quadratic Transformations: A Model for Population Growth*. – Advances in Applied Probability, 1970. – Vol. 2, №1. – P. 1–82.
5. Abdishukurovna Q. B., Abdushukurovna Q. G. QISQARTIRIB AKS ETTIRISH PRINTSIPINI TADBIQLARI //Лучшие интеллектуальные исследования. – 2026. – Т. 62. – №. 1. – С. 29-35.
6. Abdushukurovna Q. G. et al. BOSHLANG'ICH SINFDA HARAKATGA DOIR MASALALAR USTIDA ISHLASH METODIKASI //TADQIQOTLAR. – 2026. – Т. 85. – №. 4. – С. 280-284.
7. Qayumova G. A. Matematika fanini o'qitishda talabalarning mustaqil ishlash kompetentsiyani rivojlantirish //Экономика и социум. – 2024. – №. 11-2 (126). – С. 343-348.
8. Qayumova G. RAQAMLASHTIRILGAN MUHITDA MUSTAQIL ISHLASH KOMPETENSIYASINI RIVOJLANTIRISHDA AXBOROT TEXNOLOGIYALARNING O'RNI //Science and innovation. – 2022. – Т. 1. – №. B8. – С. 505-508.
9. Eshmatov B., Kayumova G. On a problem for a parabolic-hyperbolic fractional order equation with degeneration in time //American Institute of Physics Conference Series. – 2021. – Т. 2365. – №. 1. – С. 070009.