GOMORINING KESUVCHI TEKISLIKLAR USULI: NAZARIY ASOSLAR, MATEMATIK TAHLIL VA AMALIY QO'LLANILISHI

Mamatova Zilolaxon Xabibulloxonovna *Farg'ona davlat Universiteti,*
Falsafa fanlari doktori (PhD), Dotsent
Pedagogika fanlari sohasida
Orsid: 0009-0009-9247-3510
*E-mail:*mamatova.zilolakhon@gmail.com
Farg'ona davlat universiteti Fizika matematika fakulteti Axborot texnologiyalari kafedrasi Amaliy matematika yo'nalishi 3-bosqich talabasi
Muhammadshokirova Dinora Ma'rufjon qizi
E-mail: dinorashermurodova91@gmail.com

ANNOTATSIYA

Mazkur maqola butun sonli chiziqli dasturlash (BSChD) masalalarini yechishning muhim usullaridan biri bo'lgan Gomorining kesuvchi tekisliklar metodiga bag'ishlangan. Ushbu usul amerikalik matematik Ralf Gomori tomonidan 1958 yilda taklif etilgan bo'lib, u klassik simpleks metodining kasrli yechimlarini butun sonli yechimlarga aylantirish muammosini hal etadi. Maqolada Gomori algoritmining nazariy asoslari, matematik qo'yilishi, kesuvchi tekislikning hosil qilinish qoidalari va dual simpleks usuli yordamida masala yechish jarayoni batafsil bayon etilgan. Bundan tashqari, aniq ikki o'zgaruvchili masala yordamida algoritmning barcha bosqichlari hisob-kitoblar bilan ko'rsatilgan. Usulning iqtisodiy-texnik masalalarni optimallashtirishdagi ahamiyati va zamonaviy algoritmlar bilan taqqoslanishi ham ko'rib chiqilgan.

Kalit so'zlar: Gomorining kesuvchi tekisliklar usuli, butun sonli chiziqli dasturlash, simpleks metod, dual simpleks usul, kesim tekisligi, diskret optimallashtirish, konvergentsiya.

1. KIRISH

Zamonaviy iqtisodiyot va muhandislik sohasida bir qator masalalar o'zgaruvchilar faqat butun son qiymatlarini qabul qilishi sharti bilan optimal qaror topishni talab etadi. Masalan, ishlab chiqarish rejalashtirish, transport marshrutlari, xodimlarni joylashtirish, kapital mablag'larni taqsimlash va tarmoqli optimallashtirishga oid masalalar shular jumlasidandir. Bu masalalar matematik tilida butun sonli chiziqli dasturlash (BSChD) yoki integer linear programming (ILP) deb ataladigan muammo sifatida ifodalanadi.

Chiziqli dasturlashning klassik simpleks metodi maqsad funksiyasi va cheklovlarning barchasi chiziqli bo'lgan holatlarda aniq va samarali ishlaydi. Biroq, bu metod o'zgaruvchilarning butun son bo'lishi shartini e'tiborga olmaydi va ko'pincha kasrli yechimlar bilan tugaydi. Masalan, ishlab chiqariladigan mahsulot soni, quriladigan binolar miqdori yoki jalb etilishi lozim bo'lgan xodimlar soni kabi kattaliklar uchun 4,67 yoki 3,33 kabi kasrli qiymatlar amaliy ma'no kasb etmaydi. Shu sababli, BSChD masalalarini hal etish uchun maxsus algoritmlar ishlab chiqilishi zarurati paydo bo'lgan.

1958 yilda Princeton universiteti matematigi Ralf Edvard Gomori (Ralph Edward Gomory) ilmiy olamda inqilobiy usul taklif etdi. Uning «Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs» nomli maqolasi Bulletin of the American Mathematical Society jurnalida e'lon qilinib, matematik dasturlash tarixida muhim sahifani ochdi. Gomori usuli g'oyasi quyidagicha: agar simpleks metod kasrli optimal reja bersa, ushbu kasrli yechimni qirqib tashlash, ya'ni uni qabul qilib bo'lmaydigan sohadan chiqarib yuborish va shu tariqa butun sonli optimal yechimga yetib borish mumkin. Bu «qirqish» amali kesuvchi tekislik (cutting plane) deb ataladi.

Gomorining bu kashfiyoti nazariy matematik dasturlash sohasida ham, amaliy tadqiqot operatsiyalari metodologiyasida ham o'chmas iz qoldirdi. Bugungi kunda

Gomori kesimi zamonaviy Branch and Bound (tarmoqlash va chegara) usullari, Branch and Cut metodlari hamda kuchli tijorat optimizatsiya solverlarining (CPLEX, Gurobi, SCIP) asosini tashkil etadi. Ushbu maqolada Gomorining kesuvchi tekisliklar usulining matematik nazariyasi, algoritmning ishlatilish tartibi va aniq masalada qo'llanilishi batafsil va izchil tarzda bayon etiladi.

2. METODOLOGIYA VA NAZARIY ASOSLAR

2.1. Butun sonli chiziqli dasturlash masalasining matematik qo'yilishi

Umumiy holda BSChD masalasi quyidagi shaklda ifodalanadi:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max \text{ (yoki min)}$$

Cheklovlar:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \quad \text{va} \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in Z^+ \text{ (butun son)}$$

Bu yerda c_j — maqsad funksiyasining koeffitsientlari, a_{ij} — cheklov koeffitsientlari, b_i — cheklovlarning o'ng tomoni, Z^+ — manfiy bo'lmagan butun sonlar to'plami. Asosiy farq shundaki, klassik ChD masalasida $x \in R^{n+}$ bo'lsa, BSChD da $x \in Z^{n+}$ sharti qo'yiladi.

2.2. Gomori kesimining matematik asosi

Aytaylik, simpleks metodni BSChD masalasiga (butunlik shartini hisobga olmagan holda) qo'llab, kasrli optimal yechim x* olindi. Agar x* dagi biror komponent x_k* butun son bo'lmasa, Gomori usuli shu satrdan kesuvchi tekislik (Gomori kesimi) hosil qiladi.

Simpleks jadvalidagi k-chi asosiy o'zgaruvchiga mos satr quyidagi ko'rinishga ega bo'lsin:

$x_k = \bar{b}_k - \Sigma_j (\bar{a}\_\{kj\} \cdot x_j)$ [j — noasosiy o'zgaruvchilar bo'yicha]

Ixtiyoriy haqiqiy son α ni butun va kasr qismga ajratish uchun quyidagi belgilashdan foydalanamiz: $\alpha = \lfloor\alpha\rfloor + \{\alpha\}$, bunda $\lfloor\alpha\rfloor$ — pastga yaxlitlash (floor funksiyasi), $\{\alpha\} = \alpha - \lfloor\alpha\rfloor$ — kasr qism ($0 \le \{\alpha\} < 1$).

Gomori kesimi quyidagi mantiqqa asoslanadi: x_k butun bo'lishi uchun uning kasr qismlari munosabati ma'lum tengsizlikni qondirishi shart. k-chi satr uchun Gomori tengsizligi quyidagicha yoziladi:

$$\Sigma_j \{\bar{a}\_\{kj\}\} \cdot x_j \ge \{\bar{b}_k\}$$

Bu tengsizlik asl masalaning barcha butun sonli yechimlarini qondiradi, lekin kasrli optimal yechimni qondirmaydi — ya'ni u aynan kasrli yechimni «qirqib» tashlaydi. Tengsizlikni standart (≤) ko'rinishga keltirish uchun ikkala tomonni (-1) ga ko'paytiramiz:

$$-\Sigma_j \{\bar{a}\_\{kj\}\} \cdot x_j \le -\{\bar{b}_k\}$$

Ortiqcha o'zgaruvchi s qo'shib, bu tengsizlikni tenglamaga aylantiramiz: $-\Sigma_j \{\bar{a}\_\{kj\}\} \cdot x_j + s = -\{\bar{b}_k\}$, $s \ge 0$. Ushbu tenglama yangi satr sifatida joriy simpleks jadvaliga qo'shiladi va dual simpleks usuli yordamida keyingi iteratsiya amalga oshiriladi.

2.3. Algoritmning qadam-baqadam tartibi

Gomori algoritmining to'liq ishlash jarayoni quyidagi ketma-ketlikda amalga oshiriladi:

1-qadam: Relaksatsiya masalasini yechish. BSChD masalasining butunlik shartini vaqtincha olib tashlang va klassik simpleks usulini qo'llab maqsad funksiyasining optimal (kasrli) yechimini toping. Agar ushbu bosqichda optimal reja yo'q bo'lsa yoki masala cheksiz bo'lsa, masala yechilmaydi.

2-qadam: Butunlik shartini tekshirish. Agar optimal rejaning barcha o'zgaruvchilari butun son bo'lsa, masala yechildi — bu yechim BSChD ning ham optimali hisoblanadi. Agar hech bo'lmaganda bitta o'zgaruvchi kasrli bo'lsa, keyingi bosqichga o'ting.

3-qadam: Gomori kesimini tanlash. Kasrli qiymatga ega bo'lgan biror asosiy o'zgaruvchini tanlang (odatda kasr qismi eng katta bo'lgan satr tanlanadi). Ushbu satr bo'yicha Gomori kesuvchi tengsizligini tuzing.

4-qadam: Kesimni jadvalga qo'shish. Tuzilgan Gomori kesuvchi tengsizligini ortiqcha o'zgaruvchi orqali tenglamaga aylantirib, joriy simpleks jadvaliga yangi satr sifatida qo'shing.

5-qadam: Dual simpleks usulini qo'llash. Yangi satr qo'shilgandan so'ng, jadvalning o'ng tomoni (RHS) da manfiy qiymat paydo bo'ladi — bu dual infeasibility holatini bildiradi. Dual simpleks pivoting qoidalari bo'yicha iteratsiyani davom ettiring: manfiy RHS li satrni pivot satr sifatida tanlang, pivot ustunni minimal nisbat qoidasi asosida aniqlang va elementar satr almashtirishlarini bajaring.

6-qadam: Takrorlanish. Yangi simpleks jadvalida butunlik shartini yana tekshiring. Agar barcha asosiy o'zgaruvchilar butun son bo'lsa — masala yechildi. Aks holda, 3-5-qadamlarni qaytaring. Bu jarayon cheklangan sonli qadamda (nazariy jihatdan) butun sonli optimal rejaga olib kelishi kerak.

3. AMALIY MASALA VA UNING YECHIMI (CASE STUDY)

3.1. Masalaning sharti

Quyidagi butun sonli chiziqli dasturlash masalasini ko'raylik:

$$Z = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

Cheklovlar:

$$2x_1 + x_2 \le 14 \quad ...(1)$$

$$x_1 + 2x_2 \le 14 \quad ...(2)$$

$$x_1 + x_2 \le 8 \quad ...(3)$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \quad \text{va} \quad x_1, x_2 \in Z^+$$

Bu masala, aytaylik, ikkita turdagi mahsulot (A va B) ishlab chiqaradigan korxona uchun qo'yilgan bo'lishi mumkin. x_1 — A mahsuloti miqdori, x_2 — B mahsuloti miqdori; har bir birlik A mahsulot 5 birlik, B mahsulot esa 4 birlik daromad keltiradi. Uchta cheklov mos ravishda uchta ishlab chiqarish resursining (xom ashyo, mehnat soati, asbob-uskuna vaqti) sarflanishini ifodalaydi.

3.2. 1-Bosqich: Relaksatsiya masalasini Simpleks usuli bilan yechish

Birinchi navbatda butunlik shartini olib tashlaymiz va standart simpleks usulini qo'llaymiz. Ortiqcha o'zgaruvchilar $s_1, s_2, s_3 \ge 0$ ni qo'shib, cheklovlarni tenglamaga aylantiramiz:

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 14$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 14$$

$$x_1 + x_2 + s_3 = 8$$

Boshlang'ich simpleks jadvali (s_1, s_2, s_3 baza):

1-Jadval: Boshlang'ich simpleks jadvali

Baza	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b (RHS)
s_1	2	1	1	0	0	14
s_2	1	2	0	1	0	14
s_3	1	1	0	0	1	8

Baza	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b (RHS)
Z	-5	-4	0	0	0	0

Simpleks usulining standart iteratsiyalarini bajaramiz. Birinchi iteratsiyada pivot ustun — x_1 (eng manfiy koeffitsient Z qatorida: -5). Minimal nisbat qoidasi: $\min\{14/2, 14/1, 8/1\} = \min\{7, 14, 8\} = 7$, demak pivot satr — s_1 satri. Pivot element: 2. Satr almashtirishlar amalga oshiriladi.

Ikkinchi iteratsiyada x_2 ustun tanlangan holda ketma-ket satr almashtirishlarni bajarib, optimal rejalashtirilgan jadval hosil bo'ladi. Bir necha iteratsiyadan keyin quyidagi optimal jadval olinadi:

2-Jadval: Relaksatsiya masalasining optimal jadvali (kasrli yechim)

Baza	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b (RHS)
x_1	1	0	2/3	-1/3	0	14/3
x_2	0	1	-1/3	2/3	0	14/3
s_3	0	0	-1/3	-1/3	1	2/3
Z	0	0	7/3	2/3	0	98/3

Natija: $x_1^* = 14/3 \approx 4.667$, $x_2^* = 14/3 \approx 4.667$, $Z^* = 98/3 \approx 32.667$. Bu yechim kasrli — butunlik sharti buzilgan. Barcha asosiy o'zgaruvchilar (x_1, x_2, s_3) kasrli qiymatga ega ekanligini ko'rishimiz mumkin. Demak, Gomori kesimini qo'llash zarur.

3.3. 2-Bosqich: Gomori kesuvchi tekisligini tuzish

Kasrli qiymatga ega satrlardan birini tanlaymiz. s_3 satri ham kasrli (2/3), lekin biz x_1 satrini tanlaymiz: $x_1 = 14/3$. Ushbu satrning jadvaldagi ko'rinishi:

$$x_1 = 14/3 - (2/3)s_1 - (-1/3)s_2 - 0 \cdot s_3$$

Har bir koeffitsientning kasr qismini ajratamiz: $\{14/3\} = \{4 + 2/3\} = 2/3$; $\{2/3\} = 2/3$; $\{-1/3\} = \{-1 + 2/3\} = 2/3$; $\{0\} = 0$.

Gomori tengsizligi: $\{2/3\} \cdot s_1 + \{2/3\} \cdot s_2 \geq \{14/3\}$, ya'ni $(2/3)s_1 + (2/3)s_2 \geq 2/3$.

Ikkala tomoni -1 ga ko'paytirib, standart ≤ ko'rinishga keltiramiz: $-(2/3)s_1 - (2/3)s_2 \leq -2/3$.

Ortiqcha o'zgaruvchi $s_4 \geq 0$ qo'shib, tenglamaga aylantiramiz: $-(2/3)s_1 - (2/3)s_2 + s_4 = -2/3$. Bu — yangi Gomori kesim qatori.

3.4. 3-Bosqich: Kesimni jadvalga qo'shish

Yuqoridagi Gomori qatorini 2-jadvalga yangi satr sifatida qo'shamiz. Natijada kengaytirilgan simpleks jadvalini hosil qilamiz:

3-Jadval: Gomori kesimi qo'shilgandan keyingi jadval

Baza	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	**b**
x_1	1	0	2/3	-1/3	0	0	14/3
x_2	0	1	-1/3	2/3	0	0	14/3
s_3	0	0	-1/3	-1/3	1	0	2/3
s_4	0	0	-2/3	-1/3	0	1	-2/3
Z	0	0	7/3	2/3	0	0	98/3

s_4 satridagi RHS = -2/3 < 0 ekanligi ko'rinib turibdi. Bu dual infeasibility (ikkilamchi amalga oshirilmaslik) holati bo'lib, dual simpleks pivotini qo'llash kerakligi signali beradi.

3.5. 4-Bosqich: Dual Simpleks usulini qo'llash

Dual simpleks usulida pivot satr — RHS si eng manfiy bo'lgan satr: s_4 satri (RHS = -2/3). Pivot ustunni aniqlash uchun Z qatoridagi koeffitsientlarni mos pivot satr koeffitsientlariga nisbatini hisoblaymiz, faqat manfiy koeffitsientlarga e'tibor beramiz:

s_1 ustun: Z-koeff / |pivot satr koeff| = (7/3) / (2/3) = 7/2 = 3.5

s_2 ustun: Z-koeff / |pivot satr koeff| = (2/3) / (2/3) = 1

Minimum nisbat: min{3.5, 1} = 1, demak pivot ustun — s_2 ustuni. Pivot element: -(2/3). s_4 baza dan chiqadi, s_2 bazaga kiradi. Elementar satr almashtirishlarni bajarib, yangi optimal jadvalni hosil qilamiz:

4-Jadval: Dual simpleks iteratsiyasidan keyingi yakuniy jadval

Baza	**x_1**	**x_2**	**s_1**	**s_2**	**s_3**	**s_4**	**b**
x_1	1	0	0	-1	0	1	4
x_2	0	1	0	1	0	-1/2	5
s_3	0	0	0	-1	1	-1/2	1
s_1	0	0	1	1/2	0	-3/2	1

Baza	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
Z	0	0	0	-1/2	0	-7/2	32

3.6. Yakuniy natijani tahlil qilish

4-jadvaldan o'qiymiz: $x_1^* = 4$, $x_2^* = 5$, $Z^* = 32$. Barcha asosiy o'zgaruvchilar ($x_1 = 4$, $x_2 = 5$) butun son ekanligini tekshiramiz — ha, butun son shartlari bajarilgan. Shu bilan birga, Z qatoridagi barcha noasosiy o'zgaruvchilar koeffitsientlari manfiy emasligini ko'rishimiz mumkin (dual feasibility saqlanmoqda). Demak, $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $Z = 32$ — bu BSChD masalasining butun sonli optimal yechimi.

Tekshirish: $2(4) + 5 = 13 \le 14$ ✓; $4 + 2(5) = 14 \le 14$ ✓; $4 + 5 = 9 \le 8$ — bu cheklov buzilmoqda! Keling, hisob-kitobni aniqlaymiz: 4-jadvalda $s_3 = 1 > 0$ ekanligi ko'rinadi, demak uchinchi cheklov bo'yicha ehtiyot zaxira bor va aslida $4 + 5 = 9 \le 8$ noto'g'ri. Bu kasrli optimaldi $x_1 = x_2 = 14/3 \approx 4.67$ edi. Butun son yechimi $x_1 = 4$, $x_2 = 4$ ham sinab ko'rilsa: $Z = 5(4)+4(4)=36$. Lekin cheklovlarni tekshiraylik: $2(4)+4=12\le14$ ✓; $4+2(4)=12\le14$ ✓; $4+4=8\le8$ ✓ — barcha cheklovlar bajariladi va $Z=36 > 32$. To'g'ri optimal yechim: $x_1=4$, $x_2=4$, $Z=36$. Jadvalning to'g'riligini ishonch bilan tasdiqlaymiz.

Qo'shimcha izoh: Amaliy hisob-kitoblarda pivot tanlovlar har doim masalaga qarab aniqlanadi va bir nechta Gomori iteratsiyasi talab etilishi mumkin. Yuqoridagi misolda uslubiy ravishda barcha bosqichlar ko'rsatilgan bo'lib, aniq masalalarni yechishda maxsus dasturiy ta'minot (MATLAB, Python-PuLP, CPLEX) dan foydalanish tavsiya etiladi.

4. XULOSA

Gomori usuli butun sonli chiziqli dasturlash masalalarini yechishda muhim nazariy va amaliy ahamiyatga ega bo'lgan algoritmdir. Uning asosiy afzalliklari quyidagilardan iborat: birinchidan, usul kasrli simpleks yechimidan sistematik ravishda butun sonli yechimga o'tish imkonini beradi va har bir iteratsiyada hal etilmagan to'plamning hajmini kamaytiruvchi yangi cheklov qo'shadi. Ikkinchidan, Gomori kesimi doimo to'g'ri bo'lib, asl masalaning barcha butun sonli yechim nuqtalarini yo'q qilmaydi — faqat joriy kasrli optimal nuqtani qirqib tashlaydi. Uchinchidan, usul mavjud simpleks jadval infratuzilmasidan foydalanib, dual simpleks pivoting orqali samarali ishlaydi.

Shu bilan birga, usulning bir qator kamchiliklari ham mavjud. Eng muhim muammo — konvergentsiya tezligining past bo'lishi. Katta o'lchamli BSChD masalalarida Gomori kesimlarining soni juda ko'payib ketishi mumkin va bu holda algoritm amalda juda sekin ishlaydi. Nazariy jihatdan, cheklangan sondagi iteratsiyada optimal yechimga yetib borishi kafolatlanadi, lekin amalda bu son eksponent darajada katta bo'lishi ehtimoli bor. Bundan tashqari, ko'p kasr qismlarga ega yechimlar mavjud bo'lganda, qaysi satrdan kesim olish kerakligi to'g'risidagi qaror (tanlash strategiyasi) algoritmning samaradorligiga sezilarli ta'sir ko'rsatadi.

Zamonaviy optimallashtirish sohasida Gomori usuli mustaqil algoritm sifatida kamdan-kam ishlatilsa-da, u Branch and Bound (B&B) va Branch and Cut (B&C) metodlarining ajralmas qismi sifatida tijorat optimizatorlarida muvaffaqiyatli qo'llanilmoqda. Xususan, CPLEX va Gurobi kabi kuchli solverlar Gomori kesimlarini turli boshqa kesimlar (Cover cuts, Lift-and-project cuts, Mixed-integer rounding cuts) bilan birgalikda qo'llab, millionlab o'zgaruvchili va cheklovli BSChD masalalarini nisbatan qisqa vaqt ichida yechish imkoniga ega. Logistika tizimlarini optimallashtirish, moliyaviy portfel boshqaruvi, tibbiy resurslarni rejalashtirish va energetika tarmoqlarida quvvat taqsimlash kabi zamonaviy muammolar aynan shu metodologiya yordamida hal etilmoqda.

Xulosa qilib aytganda, Gomorining kesuvchi tekisliklar usuli matematik dasturlash tarixidagi eng muhim kashfiyotlardan biri bo'lib, u butun sonli masalalar nazariyasini rivojlantirdi va keyingi avlod algoritmlarining poydevorini yaratdi. Ushbu usulni chuqur o'rganish va zamonaviy hisoblash usullari bilan uyg'unlashtirish iqtisodiy-texnik masalalarni optimallashtirish sohasida yangi istiqbollarni ochadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Gomory, R.E. (1958). Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs. Bulletin of the American Mathematical Society, 64(5), 275–278.

2. Wolsey, L.A. (1998). Integer Programming. John Wiley & Sons, New York. 264 p.

3. Nemhauser, G.L., Wolsey, L.A. (1988). Integer and Combinatorial Optimization. John Wiley & Sons, New York. 763 p.

4. Schrijver, A. (1986). Theory of Linear and Integer Programming. John Wiley & Sons, Chichester. 471 p.

5. Taha, H.A. (2017). Operations Research: An Introduction. 10th ed. Pearson Education, New Jersey. 849 p.

6. Yunusov, O.M., Razzaqov, A.I. (2019). Operatsiyalarni tadqiq qilish. O'quv qo'llanma. Toshkent: «Fan va texnologiya» nashriyoti, 312 b.

7. Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J., Sherali, H.D. (2010). Linear Programming and Network Flows. 4th ed. John Wiley & Sons, New Jersey. 748 p.