GOMORYNING KESUVCHI TEKISLIKLAR NAZARIYASI, IMPLEMENTATSIYA VA AMALIY QO‘LLANILISH TAHLILI

Mamatova Zilolaxon Xabibulloxonovna

Farg‘ona davlat universiteti dotsenti, pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) E-mail:mamatova.zilolakhon@gmail.com

(Orcid: 0009-0009-9247-3510)

Tel: +998916743989

Mamasoliyev Fazliddin Rasulbek o‘g‘li

Farg‘ona davlat universiteti talabasi

E-mail:fazliddinmamasoliyev17@gmail.com

Tel: +998947883545

ANNOTATSIYA Ushbu tadqiqot Gomoryning kesuvchi tekisliklar usullarini o‘rganishga bag‘ishlangan bo‘lib, uning butun sonli dasturlash masalalarini yechishdagi markaziy rolini tahlil qiladi. Maqsad, ushbu usullarning nazariy asoslarini, turli xil Gomory kesmalarining xususiyatlarini va ularni samarali implementatsiya qilish strategiyalarini chuqur o‘rganishdan iborat. Shuningdek, ushbu usullarning zamonaviy optimallash tizimlaridagi ahamiyati va amaliy qo‘llanilishi ko‘rib chiqiladi. Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatadiki, Gomory kesuvchi tekisliklari masalalarini yechishning samaradorligini oshirishda hal qiluvchi ahamiyatga ega bo‘lib, ular yordamida yechim fazosining aniqroq cheklovlari shakllantiriladi. Ushbu usullar nafaqat nazariy jihatdan muhim, balki amaliy optimallash muammolarini hal qilishda ham keng qo‘llaniladi, bu esa ularning doimiy tadqiqotlar uchun dolzarbligini ta‘minlaydi.

Kalit so‘zlar: *Gomory kesmalari, butun sonli dasturlash, kesuvchi tekisliklar, optimallash, kombinatorik optimallash*

АННОТАЦИЯ Данное исследование посвящено изучению методов отсекающих плоскостей Гомори и анализу их центральной роли в решении задач целочисленного программирования. Цель работы заключается в глубоком изучении теоретических основ этих методов, свойств различных видов отсечений Гомори и стратегий их эффективной имплементации. Также рассматриваются значение и практическое применение данных методов в современных системах оптимизации. Результаты исследования показывают, что отсекающие плоскости Гомори имеют решающее значение для повышения эффективности решения задач, позволяя формировать более точные ограничения пространства решений. Эти методы важны не только с теоретической точки зрения, но и широко применяются при решении практических задач оптимизации, что обеспечивает их неизменную актуальность для дальнейших исследований.

Ключевые слова: *отсечения Гомори, целочисленное программирование, отсекающие плоскости, оптимизация, комбинаторная оптимизация*

ABSTRACT This research is dedicated to studying Gomory‘s cutting-plane methods, analyzing their central role in solving integer programming problems. The objective is to thoroughly investigate the theoretical foundations of these methods, the characteristics of various Gomory cuts, and strategies for their effective implementation. Furthermore, the significance and practical application of these methods in modern optimization systems are examined. The research findings indicate that Gomory’s cutting planes play a crucial role in enhancing the efficiency of solving problems, as they facilitate the formulation of tighter bounds for the solution space. These methods are not only theoretically important but are also widely applied in solving practical optimization problems, ensuring their ongoing relevance for continued research.

Keywords: *Gomory cuts, integer programming, cutting planes, optimization, combinatorial optimization*

KIRISH

Butun sonli dasturlash masalalari operatsiyalarni tadqiq qilish sohasida muhim o‘rin tutadi va iqtisodiyot, muhandislik, logistika kabi ko‘plab amaliy sohalarda uchraydi. Ushbu masalalarni yechish murakkab bo‘lib, ko‘pincha NP-qiyin sinfiga kiradi. BD masalalarini hal qilish uchun turli xil yondashuvlar mavjud bo‘lib, ular orasida kesuvchi tekisliklar usullari alohida ahamiyatga ega. Ralph Gomory tomonidan 1950-yillarning oxirida ishlab chiqilgan kesuvchi tekisliklar usullari BD masalalarini samarali yechish uchun asosiy vositalardan biriga aylandi. Bu usullar dastlabki LP relaksatsiyasining yechim fazosiga qo‘shimcha cheklovlar – kesuvchi tekisliklar qo‘shish orqali butun sonli yechimni topishga qaratilgan. Ushbu tadqiqotning maqsadi Gomoryning kesuvchi tekisliklar usullarini chuqur tahlil qilish, ularning nazariy asoslarini, turlarini va amaliy qo‘llanilishini o‘rganishdan iborat. Asosiy vazifalar sifatida ushbu usullarning matematik formulalarini ko‘rib chiqish, ularning BD algoritmlaridagi rolini aniqlash va zamonaviy optimallash dasturlarida qanday qo‘llanilayotganini tahlil qilish belgilangan. Tadqiqot ob’ekti Gomory kesuvchi tekisliklarining nazariyasi va amaliyoti, predmeti esa ularning BD masalalarini yechish samaradorligiga ta‘siri hisoblanadi.

ADABIYOTLAR SHARHI

Gomoryning kesuvchi tekisliklar usullari bo‘yicha tadqiqotlar 1950-yillardan boshlab faol olib borilgan. Gomoryning “An algorithm for integer solutions to linear programs” asari ushbu sohaning asosini tashkil etgan. Keyinchalik, Chvatal va Padberg kabi olimlar kesuvchi tekisliklar nazariyasining rivojlanishiga katta hissa qo‘shdilar, ular Chvatal-Gomory kesmalari va boshqa turdagi kesmalarni o‘rganishdi. Zamonaviy adabiyotlarda kesuvchi tekisliklar usullari ko‘pincha

"Branch-and-Cut" va "Branch-and-Price" kabi murakkab algoritmlar kontekstida oʻrganiladi. Masalan, Cornuéjols oʻz ishlarida kesuvchi tekisliklarning kombinatorik optimallashdagi rolini yoritgan. Biroq, mavjud adabiyotlarda Gomory kesmalarining turli xil turlari va ularning samaradorligini taqqoslash boʻyicha kompleks tahlil yetarli emas. Shuningdek, ularning zamonaviy optimallash dasturlarida qanday implementatsiya qilinayotgani va turli masalalar uchun eng mos kesmalar qaysi ekanligi boʻyicha chuqur tadqiqotlar kam. Ushbu ish ushbu boʻshliqlarni toʻldirishga intiladi, Gomory kesmalarining nazariy asoslarini va ularning amaliy qoʻllanilishini tizimli ravishda tahlil qiladi.

MASALANING QOʻYILISHI

Maqsad: Butun sonli (yoki aralash butun sonli) chiziqli dasturlash masalasini yechishda LP relaksatsiyasiga Gomoryning kesuvchi tekisliklarini ketma-ket qoʻshish orqali butun yechimga erishish.

Kirish maʻlumotlari:

A $\in R^{m\times n}$, b $\in R^{m}$, c $\in R^{n}$.

Oʻzgaruvchilar$x \in R^n$, ularning bir qismi yoki barchasi butun: $x_j \in Z$(yoki$x_j \in 0,1$).

Asosiy model (MILP/IP):

min (yoki max)$c^T x$

$Ax \leq b, x \geq 0$

$x_j \in Z$ (kerakli indekslar uchun).

LP relaksatsiya: butunlik cheklovlarini vaqtincha olib tashlab,$Ax \leq b$, $x \geq 0$da optimal yechim $x*$ni topish.

Vazifa: Agar $x*$butun boʻlmasa, Gomory kesmasi valid inequality qoʻshib, $x*$ni kesib tashlash va lekin barcha butun yechimlarni saqlash. Jarayon iterativ davom etadi yoki Branch-and-Cut bilan uygʻunlashtiriladi.

Natija ko‘rsatkichlari: topilgan optimal butun yechimning qiymati, kesmalar soni, hisoblash vaqti, tugunlar soni.

1-MISOL: Oddiy butun sonli $(0-1)$ ryukzakga yaqin model

Model:

$\max 8x_1 + 5x_2 + 6x_3$

$4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 7$

$x_1, x_2, x_3 \in 0,1$

LP relaksatsiya yechimi (intuitiv tahlil): qiymat/og‘irlik nisbatlari bo‘yicha tanlanganda ko‘pincha $x_3$fraksion chiqadi. Faraz qilaylik, LP relaksatsiyadan $x* = (1,0.6,0)$kabi fraksion komponentli yechim chiqdi (bu faqat illyustrativ).

Gomory butun kesmasini qurish g‘oyasi:

Simplex jadvalidagi fraksion bazis satridan qoldiq qismlarga tayangan holda kesma olinadi. Soddalashtirilgan tushuncha: $x_2$ning fraksionligi 0.6 →integral yechimni yo‘qotmasdan $x_2 \leq 0$yoki $x_2 \geq 1$ga majburlaydigan, biroq LP ni kesuvchi “yumshoqroq” chiziqli tengsizlik topamiz.

Masalan, ushbu tipdagi $0-1$modellar uchun ko‘p hollarda cover cut (qoplovchi kesma) kuchli natija beradi. Cheklov $4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 7$da $x_1, x_3$to‘plami “cover” bo‘lib,$4 + 5 = 9 > 7$. Demak, cover cut: $x_1 + x_3 \leq 1$.

Bu kesma LP yechimlaridan ayrim fraksion kombinatsiyalarni kesib tashlaydi, lekin barcha butun yechimlar uchun to‘g‘ri qoladi.

Kesmani modellar rejaga qo‘shamiz:$x_1 + x_3 \leq 1$.

Natija:

Yangi LP relaksatsiya yanada “qattiqlashadi”, fraksion yechimlar yo‘q qilinadi yoki zaiflashadi. Keyingi iteratsiyada yangi fraksion komponentga qarshi navbatdagi kesma generatsiya qilinadi. Bir necha iteratsiyada butun yechimga erishiladi yoki branch qilish zarurati kamayadi.

2-MISOL: Aralash butun sonli ishlab chiqarish rejalashtirish

Model:

maqsad: xarajatni minimallashtirish

min $12y + 3x$

talab: $x \geq 10$

quvvat: $x \leq 8y$

$y \in 0,1$ (sexni ishga tushirish qarori), $x \geq 0$(ishlab chiqarish miqdori)

LP relaksatsiya:

y ∈ [0,1] bo‘ladi. LP yechim faraz qilaylik: y* = 1.25, x* = 10 (illyustrativ; real LP‘da y* 1 dan katta bo‘la olmaydi, ammo ko‘pincha y* fraksion 0<y*<1 chiqadi, masalan y* = 1.25 o‘rniga y* = 1.25 emas, $10 \leq 8y \rightarrow y \geq 1.25$ bo‘lgani uchun LP‘da yuqori chegara yo‘q bo‘lsa fraksionlik turlicha ko‘rinishi mumkin. To‘g‘riroq stsenariy: talab x ≥ 10, quvvat$x \leq 8y \rightarrow y \geq 10/8 = 1.25$. LP‘da $y \leq 1$cheklovi yo‘q bo‘lsa, bu modelni qayta ko‘raylik.) Modelni realizmga keltiramiz:

$y \in 0,1$

$0 \leq x \leq 8y$

$x \geq 10$ talab qondirish uchun ikkinchi smena yoki boshqa resurs ham kerak bo‘lsin, lekin bizda faqat bitta sex: demak model infeasible bo‘ladi. Shuning uchun talablarga mosroq versiya:

Yaxshilangan aralash model:

min $10y + 2x$

$x \geq 14$ (talab)

$x \leq 10y + s$ (s – qo‘shimcha yetkazib berish (outsourcing))

$s \geq 0, x \geq 0, y \in 0{,}1$

LP relaksatsiyada y fraksion bo‘lishi mumkin. Masalan, LP shartlariga ko‘ra optimal yechim (illyustrativ) $y* = 0.6, x* = 14, s* = 8y* - x$bo‘yicha moslashtiriladi. Fraksion y iqtisodiy ma‘noda “sexni 60% ishga tushirish” bo‘lib, ruxsat etilmaydi. Bu holatda aralash butun sonli Gomory kesmalari ishlatiladi.

GMI kesmasining intuitiv qurilishi:

Simplex jadvalidagi fraksion bazis o‘zgaruvchining satridan qoldiq qismlar f· bilan ifodalanadi va $\Sigma floor(a_j)x_j + \Sigma ceil(a_j)x_j \geq ceil(b)$tipidagi tengsizliklar hosil bo‘ladi.

Amaliy jihatdan, yechuvchi LP bazisidan avtomatik GMI cut generatsiya qiladi va fraksion y* ni kesadi.

Natija: y butunlik tomon “tortiladi”, masalan, y = 1 ga majburlanadi yoki masala boshqa kombinatsiyani tanlaydi.

Mazkur misolning xulosasi:

Aralash butun muammolarda GMI kesmalari y kabi binar qarorlarni fraksionlashdan tozalab, LP chegarasini kuchaytiradi va branch daraxtini kichraytiradi.

Natija metrikalari: LP–IP gap, kesmalar soni, vaqt, tugunlar. Zamonaviy yechuvchilar CPLEX, Gurobi bu kesmalarni avtomatik generatsiya qiladi va Branch-and-Cutga integratsiya qiladi; amaliy tajriba ko‘pincha sezilarli tezlanishni ko‘rsatadi.

METODOLOGIYA

Ushbu tadqiqot nazariy va analitik yondashuvlarga asoslanadi. Tadqiqotning birinchi bosqichida Gomoryning kesuvchi tekisliklar usullarining matematik asoslari, jumladan, uning dastlabki formulatsiyasi va keyinchalik paydo bo‘lgan turlari masalan, butun sonli kesmalar, aralash butun sonli kesmalar o‘rganildi. Ma‘lumot to‘plash usullari sifatida ilmiy maqolalar, monografiyalar, dissertatsiyalar va optimallash dasturlari bo‘yicha hujjatlar tahlil qilindi. Ikkinchi bosqichda, bu usullarning BD masalalarini yechishda qanday qo‘llanilishi, xususan, simplex usuli bilan integratsiyasi va Branch-and-Cut algoritmlaridagi o‘rni ko‘rib chiqildi. Tahlil metodlari sifatida matematik modellashtirish, algoritmik tahlil va qiyosiy tahlil qo‘llanildi. Har bir kesuvchi tekislik turi uchun uning afzalliklari, kamchiliklari va qo‘llanilish sohalari aniqlandi. Shuningdek, zamonaviy optimallash dasturlarida masalan, CPLEX, Gurobi Gomory kesmalarining implementatsiya mexanizmlari va ularning ishlash samaradorligi tahlil qilindi. Bu metodologiya ushbu usullarning nazariy va amaliy jihatlarini to‘liq qamrab olish imkonini berdi.

NATIJALAR VA MUHOKAMA

Tadqiqot natijalari Gomoryning kesuvchi tekisliklar usullarining butun sonli dasturlash masalalarini yechishda naqadar muhimligini tasdiqladi. Dastlab Gomory tomonidan taklif qilingan butun sonli kesmalar Pure Integer Cuts LP relaksatsiyasining optimal yechimini butun sonli yechimga yaqinlashtirishda samarali ekanligi aniqlandi. Keyinchalik, aralash butun sonli kesmalar Mixed Integer Cuts nafaqat butun sonli, balki uzluksiz o‘zgaruvchilarni ham o‘z ichiga olgan masalalarni hal qilishda muhim rol o‘ynaydi. Quyidagi jadvalda Gomory kesuvchi tekisliklarining turlari, ularning xususiyatlari va qo‘llanilish sohalari tahlil qilingan:

Jadval tahlili shuni ko‘rsatadiki, har bir kesma turi o‘zining afzalliklariga ega va ma‘lum turdagi BD masalalari uchun ko‘proq mos keladi. Masalan, butun sonli kesmalar to‘liq butun sonli o‘zgaruvchilarga ega masalalarda yuqori samaradorlik ko‘rsatsa, aralash butun sonli kesmalar logistika va rejalashtirish kabi aralash butun sonli modellar uchun juda qulay. Tadqiqot shuningdek, zamonaviy optimallash yechuvchilari solvers Gomory kesmalarini avtomatik ravishda generatsiya qilish va ularni Branch-and-Cut jarayonida integratsiya qilish orqali ishlash samaradorligini sezilarli darajada oshirayotganini ko‘rsatdi. Kesmalar yordamida yechim fazosining qattiqlashishi (tightening) Branch-and-Bound daraxtining hajmini kamaytiradi va optimal yechimni tezroq topishga yordam beradi. Ba‘zi hollarda, faqat kesuvchi tekisliklar yordamida ham optimal butun sonli yechimga erishish mumkin. Biroq, kesmalarning soni va ularni generatsiya qilishning hisoblash murakkabligi computational complexity muammo bo‘lishi mumkin. Natijada, samarali kesma generatsiya strategiyalari va ularni filtratsiya qilish usullari tadqiqotning muhim yo‘nalishlaridan biri bo‘lib qolmoqda.

Kesma Turi	**Asosiy Xususiyatlari**	**Qo‘llanilish Sohalari**	**Afzalliklari**	**Kamchiliklari**
Butun Sonli Kesmalar (Pure Integer Cuts)	LP relaksatsiyasining optimal yechimidan butun sonli o‘zgaruvchilarning kasr qismlaridan hosil qilinadi. Faqat butun sonli o‘zgaruvchilar uchun.	To‘liq butun sonli dasturlash masalalari (masalan, tayinlash masalasi, ryukzak masalasi).	Aniq va kuchli cheklovlar hosil qiladi, yechim fazosini sezilarli darajada toraytiradi.	Aralash butun sonli masalalarda to‘g‘ridan-to‘g‘ri qo‘llanilmaydi, generatsiya qilish murakkab bo‘lishi mumkin.

Aralash Butun Sonli Kesmalar (Mixed Integer Cuts)	Butun sonli va uzluksiz o‘zgaruvchilarni o‘z ichiga olgan LP relaksatsiyasining optimal yechimidan hosil qilinadi.	Aralash butun sonli dasturlash masalalari (masalan, ishlab chiqarishni rejalashtirish, tarmoq dizayni).	Kengroq masalalar sinfi uchun mos keladi, LP relaksatsiyasini samarali qattiqlashtiradi.	Butun sonli kesmalarga nisbatan zaifroq bo‘lishi mumkin, generatsiyasi murakkabroq.
Chvatal-Gomory Kesmalari	Dastlabki cheklovlardan va boshqa Chvatal-Gomory kesmalaridan iterativ ravishda olingan kesmalar. Eng asosiy kesmalar turidan biri.	Kombinatorik optimallashdagi ko‘plab masalalar, umumiy butun sonli dasturlash.	Nazariy jihatdan har qanday butun sonli yechimni hosil qilish qobiliyatiga ega, universal.	Amalda juda ko‘p kesmalar generatsiya qilish mumkin, bu esa hisoblash vaqtini oshiradi.
Flow Cover/Path Cuts	Tarmoq oqimi masalalaridan kelib chiqqan maxsus kesmalar.	Tarmoq oqimi masalalari, transport va logistika masalalari.	Maxsus strukturali masalalar uchun juda samarali, kuchli cheklovlar beradi.	Faqat ma‘lum turdagi masalalar uchun mos keladi, umumiy emas.

Lift-and-Project Kesmalari	Dastlabki yechim fazosini kattaroq o‘lchamli fazoga ko‘tarish va keyin proyeksiyalash orqali hosil qilinadi.	Murakkab butun sonli masalalar, Branch-and-Cut algoritmlarida.	Juda kuchli kesmalar hosil qiladi, yechim fazosini sezilarli darajada kamaytiradi.	Generatsiya qilish juda hisoblash qimmatiga ega, implementatsiyasi murakkab.

Jadval 1. Gomoryning kesuvchi tekisliklar usullari va ularning xususiyatlari

XULOSA

Ushbu tadqiqot Gomoryning kesuvchi tekisliklar usullarining butun sonli dasturlash masalalarini yechishdagi muhim rolini atroflicha tahlil qildi. Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, Gomory kesmalari nafaqat nazariy jihatdan BD masalalarining tuzilishini chuqurroq tushunishga yordam beradi, balki amaliy optimallash muammolarini hal qilishda ham hal qiluvchi ahamiyatga ega. Ular LP relaksatsiyasining yechim fazasini qattiqlashtirish va Branch-and-Cut algoritmlarining samaradorligini oshirish orqali optimal butun sonli yechimlarni topish jarayonini tezlashtiradi. Ilmiy yangilik shundan iboratki, turli xil Gomory kesmalarining xususiyatlari, afzalliklari va kamchiliklari kompleks ravishda taqqoslandi va ularning amaliy qo‘llanilishiga oid chuqur tahlil taqdim etildi. Muhim topilmalar sirasiga, har bir kesma turining ma‘lum masalalar sinflari uchun eng samarali ekanligi va zamonaviy optimallash dasturlarida ularning avtomatik generatsiyasi BD masalalarini yechishda katta yutuqlarga erishishga imkon berishi kiradi. Kelajakdagi tadqiqotlar kesmalarni generatsiya qilishning yangi, yanada samarali usullarini ishlab chiqishga va ularning katta hajmli BD masalalaridagi ishlashini optimallashtirishga qaratilishi lozim.

AMALIY TAKLIFLAR

Ushbu tadqiqot natijalariga asoslanib, quyidagi amaliy takliflar beriladi:

1. Optimallash dasturlarini ishlab chiquvchilar Gomory kesmalarining turli xil turlarini integratsiya qilishda ularning samaradorligini oshirishga e‘tibor qaratishlari lozim, ayniqsa aralash butun sonli kesmalarni generatsiya qilish mexanizmlarini takomillashtirish zarur.
2. Tadqiqotchilarga kesmalarni generatsiya qilish uchun mashinani o‘rganish (Machine Learning) usullarini qo‘llash va ularning samaradorligini baholash tavsiya etiladi. Bu kesmalarni tanlash va ularni qo‘llash jarayonini avtomatlashtirishga yordam berishi mumkin.
3. O‘quv dasturlarida butun sonli dasturlash bo‘yicha kurslarda Gomory kesmalarining nazariy asoslari va amaliy qo‘llanilishiga ko‘proq e‘tibor berish, talabalarga optimallash yechuvchilari yordamida kesmalar generatsiyasini o‘rganish imkoniyatini yaratish lozim.
4. Sanoat va logistika sohasidagi mutaxassislarga murakkab optimallash masalalarini hal qilishda zamonaviy optimallash dasturlarining kesuvchi tekisliklar funksiyalaridan to‘liq foydalanish tavsiya etiladi, bu jarayonlarni optimallashtirish va xarajatlarni kamaytirishga yordam beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Gomory, R. E. (1958). An algorithm for integer solutions to linear programs. Princeton-IBM Mathematical Research Project, Technical Report No. 1.
2. Chvatal, V. (1973). Edmonds polytopes and a hierarchy of combinatorial problems. Discrete Mathematics, 4(4), 305-337.
3. Nemhauser, G. L., & Wolsey, L. A. (1988). Integer and Combinatorial Optimization. John Wiley & Sons.

4. Cornuéjols, G. (2008). Valid inequalities for mixed integer linear programs. Discrete Optimization, 5(2), 224-239.
5. Padberg, M. W. (1979). A note on the Chvátal-Gomory cut. Operations Research, 27(6), 1133-1135.
6. Wolsey, L. A. (2020). Integer Programming. John Wiley & Sons.
7. Bertsimas, D., & Weismantel, R. (2005). Optimization over Integers. Dynamic Ideas.