DINI SONLARI VA ULARNING ASOSIY XOSSALARI

Aliqulov Eshpulat Omonovich, Norpulatova Diana Serikovna

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent, O'zbekiston;

eshpulat-05@mail.ru norpulatovadiana@gmail.com

Matematik tahlil va funksiyalar nazariyasida klassik hosilaning mavjud bo'lmasligi muammosi XIX asrda o'z echimini topdi. Karl Veyershtrass har bir nuqtada hosila mavjud bo'lmagan uzluksiz funksiyani qurishdan so'ng, matematiklar yangi vositalar yaratish zaruriyatini his qildi. Italiyalik matematik Ulisse Dini (1845–1918) bu muammoni hal qilish maqsadida oddiy limitni yuqori va quyi limitlar bilan almashtirish g'oyasini taklif etdi. Natijada, ixtiyoriy funksiya uchun har doim mavjud bo'ladigan to'rtta Dini sonlari tizimi paydo bo'ldi.

Ta'rif. Faraz qilaylik, f(x) funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan bo'lsin. Ixtiyoriy $x\epsilon[a,b]$ nuqtani olamiz. Quyidagi nisbatni ko'raylik:

$$\frac{f(x+\mathrm{h})-f(x)}{\mathrm{h}}$$

h→0 da bu nisbatning limiti har doim ham mavjud bo'lmasligi mumkin. Lekin uning **yuqori va quyi limitlari** har doim mavjud. Ulisse Dini mana shu 4 ta limitni taklif qilgan:

- **O'ng yuqori hosila:** $\Lambda=D^{+}f(x)=\overline{\lim}_{\mathrm{h}\to 0+0}\frac{f(x+\mathrm{h})-f(x)}{\mathrm{h}}$
- **O'ng quyi hosila:** $\lambda=D_{+}f(x)=\underline{\lim}_{\mathrm{h}\to 0+0}\frac{f(x+\mathrm{h})-f(x)}{\mathrm{h}}$
- **Chap yuqori hosila:** $\Phi=D^{-}f(x)=\overline{\lim}_{\mathrm{h}\to 0-0}\frac{f(x+\mathrm{h})-f(x)}{\mathrm{h}}$

- **Chap quyi hosila:** $\phi = D_{-}f(x) = \underline{\lim}_{h\to 0+0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Muhim xossa: Ixtiyoriy $f(x)$ funksiya uchun bu to'rtta son har doim mavjud bo'lib (chekli yoki $\pm\infty$), ular klassik hosila mavjud bo'lmagan holatlarda ham funksiyaning mahalliy xususiyatlarini to'liq tavsiflab beradi.

Teorema 1: (Dini sonlari va klassik hosila orasidagi bog'liqlik)**.**

$f(x)$ funksiyasining x nuqtadagi $f'(x)$ oddiy hosilasi mavjud bo'lishi uchun zarur va yetarli shart: to'rtta Dini sonining barchasi o'zaro teng va chekli bo'lishidir, ya'ni:

$D^{+}f(x) = D_{+}f(x) = D^{-}f(x) = D_{-}f(x) = f'(x) \in \mathbb{R}$

Teorema 2: (Danjua–Yang–Saks teoremasi)**.**

Ixtiyoriy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiya uchun o'lchovi nolga teng bo'lgan to'plamdan tashqari deyarli barcha x nuqtalarida quyidagi to'rtta holatdan faqat bittasi o'rinli bo'ladi:

(i) f nuqtada differensiallanuvchan (barcha to'rtta Dini soni teng va chekli);

(ii) $D^{+}f(x) = D_{-}f(x) = +\infty$ va $D^{-}f(x) = D_{+}f(x) = -\infty$ (simmetrik cheksizlik);

(iii) $D^{+}f(x) = +\infty$, $D_{+}f(x) = = -\infty$ va chap tomonlama chekli hosila mavjud;

(iv) $D^{-}f(x) = +\infty$, $D_{-}f(x) = -\infty$ va o'ng tomonlama chekli hosila mavjud.

Ushbu teorema eng tartibsiz funksiyalar ham o'z Dini sonlari bo'yicha qat'iy matematik qonuniyatga bo'ysinishini ko'rsatadi. Dini sonlari bugungi kunda notekis tahlil (nonsmooth analysis), differensial tenglamalar barqarorligi nazariyasi va fraktallar nazariysida keng qo'llanilmoqda.

Adabiyotlar

1. Dini U. Fondamenti per la Teorica delle Funzioni di Variabili Reali. Pisa, 1878.

2. Saks S. Theory of the Integral. Warszawa–Lwów, 1937.

3. Bruckner A.M. Differentiation of Real Functions. CRM Monograph Series, AMS, 1994.

4. Thomson B.S. Real Functions. Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1985.