



КОРЕНЬ n -Й СТЕПЕНИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Меражов Нурмухаммад Икром угли.

Студент Бухарского государственного университета

Очилов Мухаммадмирзо Абдуллоевич

студент академического лицея Бухарского

технического университета

Аннотация. В этой статье мы разберем, как извлечь корень n –й степени из комплексного числа, почему результат всегда имеет несколько значений и где все это применяется на практике.

Ключевые слова. Комплексные числа, тригонометрическая форма комплексного числа, извлечение корня, корень n -й степени, формула Муавра.

Annotation. This article explores the process of extracting the n -th root of a complex number, examines the underlying reasons why the operation consistently yields multiple values, and discusses its practical applications across various fields.

Keywords: Complex numbers, trigonometric form of a complex number, extraction of the origin, n -th root, Moivre's formula.

В начале изучения комплексных чисел, многим они часто кажутся какой-то математической абстракцией, оторванной от реальности[1-2]. Но когда речь заходит об **извлечении корня n –й степени**, эта абстракция превращается в мощнейший инструмент, без которого не работала бы современная электроника, квантовая физика и даже компьютерная графика.

Если в вещественных числах корень квадратный из 4 — это просто 2 (если говорить об арифметическом корне), то в мире комплексных чисел всё гораздо интереснее. Извлечение корня n –й степени из любого комплексного



числа всегда дает ровно n различных значений. Чтобы извлечь корень n -й степени из комплексного числа надо сначала из **алгебраической формы**:

$$z = x + iy \quad (1)$$

перейти к **тригонометрической форме**:

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \quad (2)$$

где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — это модуль (длина вектора), а $\varphi = \text{Arg}(z)$ — аргумент (угол наклона) $\text{tg}(\varphi) = \frac{y}{x}$ или $\cos(\varphi) = \frac{x}{|z|}$ или $\sin(\varphi) = \frac{y}{|z|}$.

Чтобы найти все корни n -й степени из числа z , используется знаменитая формула Муавра:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \right) \quad (3)$$

где k принимает значения от 0 до $n - 1$ (всего n штук). Формулу (3) можно получить из формулы Муавра возведения комплексного числа в m -й степень:

$$z^m = \cos(m\varphi) + i \sin(m\varphi) \quad (4)$$

заменой $m = \frac{1}{n}$, используя тот факт, что синус и косинус являются периодическими функциями с периодом $T = 2\pi$.

Рассмотрим примеры.

Пример1. Решите следующее уравнения: $x^3 + 1 = 0$.

Решение.

Первый метод: Используем формулу сокращенного умножения:

$$(x+1)(x^2-x+1)=0, \quad x_1 = -1, \quad x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

Второй метод: $x^3 = -1$, $x = \sqrt[3]{-1}$, $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ — это тригонометрическая форма комплексного числа -1 (вещественные числа являются комплексными числами мнимой частью равной нулю). Используя формулу (3) вычислим 3-й корень из -1 :



$$\sqrt[3]{\cos \pi + i \sin \pi} = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right).$$

$$k = 0, x_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k = 1, x_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

$$\begin{aligned} k = 2, x_3 &= \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) + i \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \\ &= \cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Казалось бы, зачем искать три корня там, где обычный человек видит один? Но без этого математического аппарата «сломались» бы несколько ключевых технологий.

В цепях переменного тока напряжение и ток постоянно меняются по синусоидальному закону. Описывать их обычными числами неудобно. Инженеры используют комплексные числа. В квантовом мире частицы описываются волновыми функциями, которые принципиально комплексны. Извлечение корней из комплексных операторов используется для нахождения энергетических уровней атомов. Каждый раз, когда вы слушаете MP3, созваниваетесь по Zoom или используете шумоподавление в наушниках, ваш телефон выполняет **Быстрое преобразование Фурье**. Алгоритм **преобразование Фурье** разбивает сложный звуковой сигнал на отдельные частоты. Базовым «кирпичиком» этого алгоритма являются так называемые *корни из единицы* (поворотные коэффициенты). Без умения быстро находить и перемножать эти корни алгоритм работал бы слишком медленно для обработки звука или видео в реальном времени и т.д.

Пример2. Вычислим квадратный корень из 4, т.е. $\sqrt{4}$.



Решение. Используем формулу (3), для этого запишем число 4 в тригонометрической форме:

$$4 = 4(\cos(0) + i \sin(0)).$$

Теперь

$$\sqrt{4} = \sqrt{4}(\cos\left(\frac{0 + 2\pi k}{2}\right) + i \sin\left(\frac{0 + 2\pi k}{2}\right))$$

где $k = 0, 1$.

При $k = 0$: $\sqrt{4} = 2$.

При $k = 1$: $\sqrt{4} = -2$.

Значит: $\sqrt{4} = \pm 2$.

Вычисление квадратного корня из 4 — отличный пример того, как пересекаются привычная нам школьная арифметика и более глубокая высшая математика. Результат будет зависеть от того, в каком «поле» чисел мы работаем.

Если мы работаем в рамках обычных действительных (вещественных) чисел, то под знаком корня $\sqrt{4}$ всегда подразумевается **арифметический квадратный корень**.

Арифметический квадратный корень из неотрицательного числа — это такое *неотрицательное* число, квадрат которого равен исходному числу. Поэтому ответ строго один:

$$\sqrt{4} = 2.$$

(Да, мы знаем, что $(-2) \cdot (-2) = 4$, но сам значок радикала $\sqrt{}$ по определению выбирает только положительное значение).

Если же задача ставится как «найти корни уравнения $x^2 = 4$ » или мы извлекаем корень на комплексной плоскости, то у корня 2-й степени будет **ровно два значения**: $\sqrt{4} = \pm 2$.



После такого примера, ученик понимает различия понятия **арифметический квадратный корень** и просто **корень 2-й степени (квадратный корень)**.

Заключение

Извлечение корня n –й степени из комплексного числа — это не просто абстрактное упражнение для ума. Это мост между линейной алгеброй, геометрией и волновыми процессами реального мира. Понимание того, как устроены эти корни, дает ключ к управлению сигналами, частотами и энергией — всем тем, на чем строится технологический прогресс XXI века [3].

Литература

1. V.V. Konev. HIGHER MATHEMATICS, Part 2. Textbook. The Second Edition. Tomsk: TPU Press. 2009. 134 p.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987. — 688 с.
3. Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. Математические образы и хаос. — М.: Мир, 1993. — 176 с.