



ТЎПЛАМНИНГ ЧЕГАРАСИ. ҲОСИЛАВИЙ ТЎПЛАМ. ҲАММА ЖОЙДА ЗИЧ ВА ЗИЧ БЎЛМАГАН ТЎПЛАМЛАР.

D.R.Beshimova

Buxoro davlat universiteti Drbeshimova@gmail.com

Аннотасија. *Ushbu ishda topologik fazolar, to'plam chegarasi, topologik fazolar bazasi, zich to'plamlar tushunchalarining nazariy ahamiyati va amaliy qo'llanilishini chuqur o'rganilgan.*

Калит со'злар: *topologik fazolar, topologik fazolar bazasi, o'plam chegarasi, topologik fazolar bazasi, zich to'plamlar*

A - тўплам (X, τ) топологик фазонинг тўплам остиси бўлсин.

3.1.Таъриф. x - нуқта A тўпламнинг чегаравий нуқтаси дейилади, агар унинг ихтиёрий O_x атрофи A тўплам ва $X \setminus A$ тўплам билан кесишса, яъни $O_x \cap A \neq \emptyset$ ва $O_x \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ шартлар бажарилса.

A тўпламнинг чегарасини FrA кўринишда белгиланилади.
 $FrA = [A] \cap [X \setminus A]$ тенгликнинг ўринлиги 3.1 таърифдан келиб чиқади.

3.1. Тасдиқ. A – тўплам (X, τ) топологик фазонинг ихтиёрий тўплам остиси бўлсин, у ҳолда $FrA = [A] \setminus IntA$ ўринли.

Исботи. а) x - нуқта A - тўпламнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин, яъни $x \in FrA$. Бу нуқтанинг ихтиёрий O_x - атрофини қарайлик. У ҳолда $O_x \cap A \neq \emptyset$ ва $O_x \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ шартлар бажарилади. $O_x \cap A \neq \emptyset$ дан $x \in [A]$ эканлиги келиб чиқади. Агар $x \in IntA$ бўлса, у ҳолда x нуқтанинг шундай O_x атрофи топилиб,



$O_1x \subset \text{Int}A$ муносабат ўринли бўлади. Бу эса x нуқтанинг A тўпламнинг чегарасига тегишли эканлигига зид. Демак, $x \in [A] \setminus \text{Int}A$ экан.

б) Ихтиёрий $x \in [A] \setminus \text{Int}A$ нуқтани олайлик, у ҳолда $x \in [A]$ ва $x \notin \text{Int}A$ бўлади. $x \notin \text{Int}A$ муносабатдан x нуқтанинг ихтиёрий Ox атрофи A тўпламда тўлиқ ётмайди. Бу эса $Ox \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ эканлигини билдиради. Демак, $x \in [A] \cap [X \setminus A]$ экан.

3.1 таъриф ва 3.1 тасдиқдан қуйидаги натижани оламиз.

3.1.Натижа. Агар A тўплам (X, τ) топологик фазонинг тўплам остиси бўлса, у ҳолда $\text{Fr}A = [A] \setminus \text{Int}A = [A] \cap [X \setminus A]$ муносабат ўринли экан.

3.2.Тасдиқ. x - нуқта $\text{Fr}A$ тўпламга тегишли бўлиши учун x нуқтанинг ихтиёрий $B(x)$ - база (ихтиёрий база) элементи учун $U \cap A \neq \emptyset \neq U \setminus A$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исботи. Зарурлиги. x - нуқта $\text{Fr}A$ тўпламга тегишли бўлсин ва $B(x) = \{U_\alpha : \alpha \in S\}$ - оила x нуқтанинг базаси бўлсин. Ҳар қандай U_α - тўплам x нуқтанинг атрофи бўлганлигидан, 3.1 таърифга кўра $Ox \cap U_\alpha \neq \emptyset$ ва $Ox \cap (X \setminus U_\alpha) \neq \emptyset$ муносабатлар бажарилади. Ўз навбатида $A \cap U_\alpha \neq \emptyset$ ва $A \cap (X \setminus U_\alpha) \neq \emptyset$ ўринли бўлади.

Етарлилиги. $B(x) = \{U_\alpha : \alpha \in S\}$ - оила x - нуқтанинг базаси бўлсин ва $U_\alpha \cap A \neq \emptyset \neq U_\alpha \setminus A$ шартлар бажарилсин. Биз $x \in \text{Fr}A$ эканлигини исботлаймиз. Бунинг учун $U_\alpha \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ шартнинг бажарилиши етарли.

Для этого достаточно показать, что $U_\alpha \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Ясно, что $U_\alpha \setminus A = G$ – непустое открытое множество X и не лежит множестве A , то $G \subset X \setminus A$ или $\emptyset \neq U_\alpha \setminus A = G \subset X \setminus A$. 3.2 тасдиқ исботланди.



3.1. Теорема. Чегаравий оператор куйидаги хоссаларга эга:

$$1) \text{Int}A = A \setminus \text{Fr}A;$$

$$2) [A] = A \cup \text{Fr}A;$$

$$3) \text{Fr}(A \cup B) \subset \text{Fr}A \cup \text{Fr}B;$$

$$4) \text{Fr}(A \cap B) \subset \text{Fr}A \cup \text{Fr}B;$$

$$5) \text{Fr}(X \setminus A) = \text{Fr}A;$$

$$6) X = \text{Int}A \cup \text{Fr}A \cup \text{Int}(X \setminus A);$$

$$7) \text{Fr}[A] \subset \text{Fr}A;$$

$$8) \text{FrInt}A \subset \text{Fr}A;$$

9) A очик тўплам бўлиши учун $\text{Fr}A = [A] \setminus A$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир;

10) A ёпиқ тўплам бўлиши учун $\text{Fr}A = A \setminus \text{Int}A$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир;

11) A очик-ёпиқ тўплам бўлиши учун $\text{Fr}A = \emptyset$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исботи. 1) хоссани кўрсатамиз. а) $x \in \text{Int}A$ бўлсин, у ҳолда x нуқтанинг шундай Ox атрофи топилиб, $Ox \subset A$ бўлади. У ҳолда $x \notin X \setminus A$ бўлади, демак, $x \notin \text{Fr}A$ бўлади, бундан $x \in A \setminus \text{Fr}A$ эканлиги келиб чиқади.

б) Ихтиёрий $y \in A \setminus \text{Fr}A$ нуқтани оламиз, у ҳолда $y \in A$ ва $y \notin \text{Fr}A$ бўлади. У ҳолда y нуқтанинг шундай Oy атрофи топилиб, $Oy \cap A \neq \emptyset$ ва $Oy \cap (X \setminus A) = \emptyset$ шартлар бажарилади. Бундан, $Oy \subset A$ эканлиги келиб чиқади, яъни, $y \in \text{Int}A$ бўлади. а) ва б) пунктлардан $\text{Int}A = A \setminus \text{Fr}A$ тенгликни оламиз.



2) хоссани кўрсатамиз. а) Ихтиёрий $x \in [A]$ нуқтани оламиз. Бунда икки хол бўлиши мумкин: ёки $x \in A$, ёки, $x \notin A$. Иккинчи ҳолда $x \in [A] \setminus A$ бўлади. Бунда x нуқтанинг ихтиёрий Ox атрофи учун $Ox \cap A \neq \emptyset$ ва $Ox \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ шартлар ўринли. Бундан $x \in FrA$ эканлиги келиб чиқади.

б) Ихтиёрий $x \in A \cup FrA$ нуқтани олайлик, у ҳолда ёки $x \in A$, ёки $x \in FrA$ бўлади. Биринчи ҳолда $x \in [A]$ бўлади, иккинчи ҳолда эса $x \in FrA = [A] \cap [X \setminus A]$ бўлади. Бундан $x \in [A]$ эканлиги келиб чиқади. а) ва б) пунктлардан $[A] = A \cup FrA$ эканлиги келиб чиқади.

3) хоссани кўрсатамиз.

$$Fr(A \cup B) = [A \cup B] \cap [X \setminus (A \cup B)] = ([A] \cup [B]) \cap [(X \setminus A) \cap (X \setminus B)] \subset$$

$$([A] \cup [B]) \cap ([X \setminus A] \cap [X \setminus B]) \subset ([A] \cap (X \setminus A)) \cup ([B] \cap (X \setminus B)) = FrA \cup FrB.$$

4) хоссани кўрсатамиз.

$$Fr(A \cap B) = [A \cap B] \cap [X \setminus (A \cap B)] = [A \cap B] \cap [(X \setminus A) \cup (X \setminus B)] = [A \cap B] \cap ([X \setminus A] \cup [X \setminus B]) \subset$$

$$([A] \cap [X \setminus A]) \cup ([B] \cap [X \setminus B]) = FrA \cup FrB.$$

5) хоссани кўрсатамиз. $Fr(X \setminus A) = [X \setminus A] \cap [X \setminus (X \setminus A)] = [X \setminus A] \cap [A] = FrA.$

6) хоссани кўрсатамиз. $X = IntA \cup FrA \cup Int(X \setminus A)$ тенгликни кўрсатамиз.

$$(A \setminus FrA) \cup FrA \cup (X \setminus A) \setminus Fr(X \setminus A) = A \cup (X \setminus A) \cup FrA = [A] \cup (X \setminus A) = X.$$

7) хоссани кўрсатамиз. Ихтиёрий $x \in Fr[A]$ нуқтани олайлик. У ҳолда $x \in [[A]] \cap [[X \setminus A]] = [A] \cap [X \setminus A] = FrA$ бўлади, бундан $x \in FrA$ эканлиги келиб чиқади.

8), 9), 10), 11) хоссаларни юқоридаги каби исботланади.



Foydalanilgan adabiyotlar

1. J. R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall.
2. J. Dugundji. *Topology*.
3. Ю.В.Садовничий, Р.Б.Бешимов, Т.Ф.Жураев. Топология, 2021, Тошкент, Университет, 200 стр..