



MUSBAT ANIQLANGAN MATRITSALAR VA ULARNING XOSSALARI.

Shodiyev Mirzobek Ubaydullo o'g'li

Buxoro Davlat Universiteti Differensial tenglamalari kafedrası o'qituvchisi

Email: mirzobekshodiyev7@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada Musbat aniqlangan matritsasi haqida tushuncha , Musbat aniqlangan matritsasini qo'llash , Musbat aniqlangan matritsasiga oid bir nechta teoremlar va misollar berildi. Musbat aniqlangan matritsasi matematikada Algebra fanida ko'p uchraydi. .

Annotation. Annotation. This paper provides an overview of the Positive matrix, the application of the Positive matrix, and several theorems and examples related to the Positive matrix. The Positive matrix is common in mathematics and in the science of algebra and functional analysis.

Kalit so'zlar: musbat matritsa , argument, kompleks, vektor, matritsa, transponerlash, musbat matritsa, funksiya, simetrik

Key words: Positive, argument, complex, vector, matrix, transponder, positive matrix, function, symmetric

Bizga C^n fazodan n –o'lchamli H gilbert fazosi berilgan bo'lsin. Ikki x va y vektorlar vektor ko'paytmasini $\langle x, y \rangle$ yoki $x * y$ ko'rinishida ifodalaymiz. Barcha chiziqli operatorlar fazosi H ni $L(H)$ orqali belgilaymiz va $n \times n$ kompleks matritsalarini $M_n(C)$ yoki M_n fazo orqali belgilaymiz. $L(H)$ fazoning har bir elementi A , C^n ning standart bazisi $\{e_j\}$ matritsani aniqlanadi. A orqali biron matritsani belgilaymiz.

1.1.1-ta'rif. Agarda A matritsa uchun quyudagi shart bajarilsa



$$\langle x, Ax \rangle \geq 0 \text{ barcha } x \in H \quad (1.1.1)$$

U holda A matritsa musbat aniqlangan matritsa deyiladi.

1.1.2-ta'rif. Agarda A matritsa uchun quyudagi shart bajarilsa

$$\langle x, Ax \rangle > 0 \text{ barcha } x \neq 0 \quad (1.1.2)$$

U holda A matritsa qat'iy musbat aniqlangan matritsa deyiladi .

A qat'iy musbat aniqlangan matritsa, musbat aniqlangan deyiladi faqat va faqat A ning teskari mavjud bo'lsa.

Qisqacha qilib, qat'iy musbat aniqlangan yoki musbat aniqlangan matritsalarini bir nom bilan musbat matritsa termini ishlatiladi. Bazida, agar musbat aniqlangan matritsaga urg'u qaratilsa, bu qat'iy musbat bo'ladi. A musbat matritsani bildirishi uchun, $A \geq 0$ ni belgilash ishlatiladi va $A > 0$ qat'iy musbatligini bildiradi.

A musbat matritsalarini juda xam ko'p xossalari mavjut. Misol uchun:

- (i) A musbat matritsa bo'ladi agarda Hermitian ($A = A^*$) va barcha xos qiymatlari nomanfiy bo'lsa. A qat'iy musbat matritsa deyiladi agarda uning barcha xos qiymatlari musbat bo'lsa.
- (ii) A musbat matritsa bo'ladi agarda Hermitian va barcha bosh minorlari nomanfiy bo'lsa. A qat'iy musbat matritsa deyiladi agarda uning barcha bosh minorlari musbat bo'lsa
- (iii) A musbat matritsa bo'ladi agarda ba'zi B matritsalar uchun $A = BB^*$, A qat'iy musbat matritsa deyiladi agarda B yagona bo'lmasa.
- (iv) A musbat matritsa bo'ladi agarda $A = TT^*$ ba'zin T yuqori uchburchakli matritsa uchun
- (v) A musbat matritsa bo'ladi agarda $A = B^2$ ba'zi B musbat matritsalar uchun . Bunda B yagona. Biz $B = A^{\frac{1}{2}}$ deb yozib va A ning kvadrat ildizi



(vi) deyamiz. A qat'iy musbat matritsa deyiladi agarda B qat'iy musbat matritsa bo'lsa.

A musbat matritsa bo'ladi agarda H ning $x_1, x_2, \dots, x_n$ lari mavjud bo'lsa,

$$a_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle. \quad (1.1.3)$$

A qat'iy musbat matritsa deyiladi agarda x_j ; $1 \leq j \leq n$ vektorlar chiziqli erkli bo'lsa. Musbat matritsalarini tavsiflovchi bir qator tasdiqlar mavjud. Qulaylik uchun quyida biz ulardan ba'zilarini isbotsiz keltiramiz.

1.1.1-tasdiq. A musbat matritsa bo'lishi uchun u ermit matritsa bo'lib, barcha xos qiymatlari nomanfiy bo'lishi zarur va yetarlidir. A qat'iy musbat bo'lishi uchun esa barcha xos qiymatlari musbat bo'lishi zarur va yetarlidir.

1.1.1-misol Bizga $A = \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ Ermit matritsasi berilgan bo'lsin. A matritsani musbatlikka tekshiring.

Demak A matritsamiz Ermit, xos qiymatlarini topsak, ya'ni $A - \lambda I = 0$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & i \\ -i & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0; \quad \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\lambda_{1,2} > 0$. Bundan, A matritsa qat'iy musbat.

1.1.2-tasdiq. A musbat matritsa bo'lishi uchun u ermit matritsa bo'lib, barcha bosh minorlarining determinanti nomanfiy bo'lishi zarur va yetarlidir. A qat'iy musbat bo'lishi uchun esa barcha bosh minorlarining determinanti musbat bo'lishi zarur va yetarlidir.

1.1.2-misol Bizga $A = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & i \\ 2+i & 2 & 5 \\ -i & 5 & 3 \end{pmatrix}$ Ermit matritsasi berilgan bo'lsin.

A matritsani musbatlikka tekshiring.

A matritsani bosh minorlarining determinantini topamiz

$$|A_1| = |1| = 1; \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2-i \\ 2+i & 2 \end{vmatrix} = -3$$



$$|A_3| = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2-i & i \\ 2+i & 2 & 5 \\ -i & 5 & 3 \end{vmatrix} = -46$$

Demak A matritsaning barcha bosh minorlari musbat emasligidan, A matritsa musbat aniqlanmagan.

1.1.3-tasdiq. A musbat matritsa bo'lishi uchun shunday B matritsa topilib, $A = B^* \cdot B$ bo'lishi zarur va yetarlidir. A qat'iy musbat bo'lishi uchun esa B singulyar bo'lmagan matritsa bo'lishi zarur va yetarlidir.

1.1.3-misol Bizga $A = \begin{pmatrix} 9 & 5-i & i+1 \\ 5-i & 6 & 4+i \\ i+1 & 4+i & 4 \end{pmatrix}$ matritsa berilgan bo'lsin. A

matritsani musbatlikka tekshiring

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -i \\ 1 & 2 & 1 \\ i & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ matritsani tanlab olib unga qo'shma } B^* \text{ quyudagicha}$$

$$B^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & i \\ 1 & 2 & 1 \\ -i & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ bo'ladi. } A = B^* \cdot B \text{ shartga tekshirib ko'ramiz}$$

$$B^* \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -i \\ 1 & 2 & 1 \\ i & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & i \\ 1 & 2 & 1 \\ -i & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5-i & i+1 \\ 5-i & 6 & 4+i \\ i+1 & 4+i & 4 \end{pmatrix} = A$$

Haqiqatdan o'rinli. Demak, A matritsa musbat aniqlangan matritsa.

1.1.4-tasdiq. A musbat matritsa bo'lishi uchun shunday B musbat matritsa topilib, $A = B^2$ tenglik bajarilishi zarur va yetarlidir. A matritsa qat'iy musbat bo'lishi uchun B ning qat'iy musbat bo'lishi zarur va yetarlidir.

4-tasdiqdagi B matritsa yagona bo'lib, unga A matritsaning kvadratik ildizi deyiladi va $B = A^{1/2}$ kabi belgilanadi.

1.1.4- misol Bizga $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7i \\ 4 & 10 & 5i \\ 4i & 6i & -1 \end{pmatrix}$ matritsa berilgan bo'lsin. A

matritsani musbatlikka tekshiring



$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & i \\ 1 & 3 & i \\ i & i & 1 \end{pmatrix} \text{ matritsani tanlab olamiz va } A = B^2 \text{ shart bajarilishini}$$

tekshiramiz.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & i \\ 1 & 3 & i \\ i & i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & i \\ 1 & 3 & i \\ i & i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7i \\ 4 & 10 & 5i \\ 4i & 6i & -1 \end{pmatrix} = A$$

Haqiqatdan o'rinli. Demak, A matritsa musbat aniqlangan matritsa.

Navbatdagi tasdiqni bayon qilish uchun L orqali Evklid fazosini, ya'ni skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazoni belgilaymiz.

1.1.5-tasdiq. $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$ musbat bo'lishi uchun shunday $z_1, z_2, \dots, z_n \in L$ elementlar topilib,

$$a_{ij} = (z_i, z_j), 1 \leq i, j \leq n$$

tengliklar bajarilishi zarur va yetarlidir. A qat'iy musbat bo'lishi uchun z_j , $1 \leq j \leq n$ elementlar chiziqli bog'lanmagan bo'lishi zarur va yetarlidir.

1.1.5- misol: Bizga A matritsa berilgan uni musbat aniqlanganlikda tekshiring

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = 0$$

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (-3 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) \cdot (-1 - \lambda) = 0$$

Bundan $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = -1$ ligi kelib chiqadi. Bunda $\lambda_1, \lambda_3 < 0$ va $\lambda_2 > 0$ ligidan A matritsa musbat aniqlanmagan.

1.1.6-teorema: Agar A va B matritsalar ermit (musbat) matritsalar bo'lsa, u holda $A + B$ ham ermit matritsa (musbat matritsa) bo'ladi. AB ko'paytma ermit



matritsa bo'lishi uchun A va B matritsalar kommutativ (ya'ni o'rin almashinish xossasiga ega) bo'lishi zarur va yetarlidir.

Ushbu $S = AB + BA$ tenglik bilan aniqlangan matritsaga A va B larning simmetrik ko'paytmasi deyiladi. Agar A va B ermit matritsalar bo'lsa, u holda S ham ermit matritsa bo'ladi. Agar A va B musbat matritsalar bo'lsa, umuman olganda S musbat matritsa bo'lishi shart emas.

1.1.7-misol. Istalgan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sonlari uchun ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \beta \end{pmatrix}$$

ermit matritsalarini qaraymiz. Ko'rinib turibdiki, agar $\alpha > 0$ bo'lsa, u holda A musbat matritsa bo'ladi. Ixtiyoriy $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ element uchun

$$(Bz, z) = |z_1|^2 + 2\beta \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + \beta |z_2|^2$$

tenglik o'rinlidir. φ orqali $z_1 \bar{z}_2$ kompleks sonning argumentini belgilaymiz. Agarda $0 < \alpha < 1$ bo'lganda musbatdir. U holda $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1| |z_2| \cos \varphi$ tenglik o'rinlidir. Shu sababli (Bz, z) kvadratik formani

$$(Bz, z) = (|z_1| + \beta |z_2| \cos \varphi)^2 + \beta(1 - \beta) |z_2|^2 \cos^2 \varphi$$

kabi tasvirlash mumkin. Shunday qilib, $\beta \in (0, 1)$ bo'lganda B musbat matritsa bo'lar ekan.

S matritsaning aniqlanishiga ko'ra

$$S = \begin{pmatrix} 2 & \beta + \alpha\beta \\ \beta + \alpha\beta & 2\alpha\beta \end{pmatrix}$$

tenglik o'rinli bo'lib, istalgan $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ element uchun

$$(Sz, z) = 2|z_1|^2 + 2\beta(1 + \alpha) \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + 2\alpha\beta |z_2|^2$$

tenglik o'rinlidir. Bunda α nolga yaqin, β esa 1 ga yaqin son bo'lsa, u holda S musbat matritsa bo'lmaydi.



Masalan, $z_0 = (1, -4) \in C^2$ element uchun $(Sz_0, z_0) = 2 - 8\beta(1 + \alpha) + 32\alpha\beta$ tenglik o'rinlidir. Agar $\alpha = 1/32$ va $\beta = 32/33$ deb olinsa, u holda.

$$(Sz_0, z_0) = -\frac{166}{33} < 0.$$

(i)

Biz C^n ning elementlari ustun elementlari deymiz. Agar $x_1, x_2, \dots, x_n$

$n \times m$ matritsalarining $x_1, x_2, \dots, x_m$ ustunlari $[x_1, x_2, \dots, x_m]$ kabi yoziladi.

Qo'shma matritsa esa

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_m^* \end{bmatrix}$$

kabi yoziladi.

Endi, agar $x_1, x_2, \dots, x_n$ C^n ning elementlari bo'lsa So'ng

$$[[x_i^*, x_j]] = \begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} [x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Shuningdek bu matritsa musbat .Agar A musbat bo'lsa, quyidagicha yoza olamiz:

$$a_{ij} = \langle e_i, Ae_j \rangle = \langle A^{\frac{1}{2}}e_i, A^{\frac{1}{2}}e_j \rangle$$

Agarda biz $x_j = A^{\frac{1}{2}}e_j$ deb tanlasak unda biz (1.2.3) ga ega bo'lamiz.

1.1.8-misol. A, B rangi birga teng bo'lgan musbat matritsa berilgan bo'lsin. $A = xx^*, B = yy^*$ x va y vektorlar mavjud bo'lsin. $A \cdot B = zz^*$ z va y koordinatalarining ko'paytmasi $z = x \cdot y$ ni bo'ladi. 2 musbat matritsalarining Shur ko'paytmasi musbat bo'ladi.



Агар 2 та A ва B Ермит матритсаси yoki musbat bo'lsa $A + B$ bo'ladi. Ularning ko'paytmasi AB bo'ladi, Ermit shunga qaramay o'zgartiradi. A va B ning simmetriklashgan ko'paytmasi quyudagi matritsa bo'ladi

$$S = A \cdot B + B \cdot A \quad (1.3.4)$$

Агар A ва B Ермит bo'lsa, S ham Ермит bo'ladi. Shunga qaramasdan agar A va B lar musbat bo'lsa S ning musbat bo'lishi talab qilinmaydi. Misol uchun ushbu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Агар $\varepsilon > 0$ va $0 < \alpha < 1$ bo'lsa musbat bo'ladi, ammo ε njolga yopiq va α birga yopiq bo'lsa S musbat bo'lmaydi. Bu shuni ko'rsatadiki, S musbat A qat'iy musbat bo'lsa B musbat bo'ladi

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Sh.A.Ayupov, B.A.Omirov, A.X.Xudoyberdiyev Chiziqli algebra . Darslik 2023 y.
2. А. С. Мищенко, Эрмитова К-теория. Теория характеристических классов, методы функционального анализа, УМН, 1976, том 31
3. С. П. Новиков , Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов Z -теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонового формализма. Некоторые применения к дифференциальной топологии и теории характеристических классов. I, Изв. АН, сер. матем.
4. Ф.Гантмахер. Теория матриц. ЛитРес. 2018, 581 с.
5. [Leonard E. Fuller](#). Basic Matrix Theory ЛитРес. 2017, 256 с.
6. [R. Bhatia](#) Matrix Analysis Springer-Verlag, New York, 1997
7. Richard Bellman. Introduction to Matrix Analysis in 1997 426 p.



8. Sh.A.Ayupov, B.A.Omirov, A.X.Xudoyberiyev, F.H.Haydarov Algebra va sonlar nazariyasi. Toshkent 2019 296 s.
9. Yisong Yang. A Matrix Trace Inequality, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 133 (1988), pp. 573-574.
10. N.Tosheva, M.Shodiyev. Ermit matritsalarini va ularning xossalari "bumerang" metodi orqali o'rganish PEDAGOGIK MAHORAT Ilmiy-nazariy va metodik jurnal MAXSUS SON
11. Ando T. Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products. Linear Algebra and Applications. Vol. 26, 1976, P. 203-241.