KUB MATRITSALARDA KO‘PAYTIRISH AMALLARINI BAJARISH HAQIDA

Nematova Parvina Nodir qizi,

Buxoro davlat universiteti magistranti

p.n.nematova@buxdu.uz

Annotatsiya. Ushbu maqolada kub matritsalar tushunchasi, ularning algebraik xossalari va ko‘paytirish amalining nazariy asoslari ko‘rib chiqilgan. Uch o‘lchamli matritsa elementlari o‘rtasidagi o‘zaro bog‘liqlik, ularning matematik modellashtirish va amaliy qo‘llashdagi ahamiyati tahlil qilingan. Shuningdek, kub matritsalar ko‘paytmasini aniqlashda qo‘llaniladigan formulalar va ularning chiziqli algebra hamda tenzor tahlil bilan aloqasi ochib berilgan.

Ushbu maqolada kvadratik stoxastik jarayonlar (QSP) — ya’ni kubik matritsalar uchun Markov jarayonlari deb ataluvchi yangi turdagi jarayonlarni aniqlaymiz. Bu jarayonlar uzluksiz vaqt bo‘yicha o‘zgaruvchi σ-stoxastik kubik matritsalar asosida aniqlanadi va ular Kolmogorov–Chapman tenglamasining (KCE) kubik matritsalar ko‘paytmasi uchun o‘xshash shaklini qanoatlantiradi.

Kalit so‘zlar: Kub matritsa, uch o‘lchamli massiv, kvadratik stoxastik jarayonlar, Markov jarayoni, Maksimov ko‘paytma amali, **Kolmogorov–Chapman tenglamasi,** algebraik tuzilma, chiziqli algebra, tenzor tahlili.

ON PERFORMING MULTIPLICATION OPERATIONS IN CUBIC MATRICES

Abstract. This article explores the concept of cubic matrices, their algebraic properties, and the theoretical foundations of the multiplication operation. The interrelations among the elements of three-dimensional matrices, as well as their significance in mathematical modeling and practical applications, are analyzed. In addition, the formulas used to determine the product of cubic matrices and their connections with linear algebra and tensor analysis are presented.

In this paper, we introduce quadratic stochastic processes (QSPs)—a new class of processes referred to as Markov processes for cubic matrices. These processes are defined based on σ-stochastic cubic matrices that vary continuously over time and satisfy an analogue of the Kolmogorov–Chapman equation (KCE) formulated for the multiplication of cubic matrices.

Keywords: cubic matrix, three-dimensional array, quadratic stochastic processes, Markov process, Maksimov multiplication operation, Kolmogorov–Chapman equation, algebraic structure, linear algebra, tensor analysis.

Kirish. Matematikaning chiziqli algebra sohasi matritsalar va ular ustida bajariladigan amallarni oʻrganishga asoslanadi. An’anaviy ravishda matritsalar ikki oʻlchamli tuzilmalar boʻlib, hisoblash tizimlari, iqtisodiy modellar, mexanika va informatikada keng qoʻllaniladi. Soʻnggi yillarda bu tushuncha uch oʻlchamli shaklgacha kengaytirildi va kub matritsalar konsepsiyasi ilmiy adabiyotlarda faol oʻrganila boshlandi.

Kub matritsa — bu elementlari uchta indeks bilan aniqlanadigan tuzilma boʻlib, har bir element uch oʻlchamli fazodagi ma’lumotni ifodalaydi. Bunday tuzilmalar koʻp oʻlchamli ma’lumotlarni modellashtirish va tahlil qilish, shuningdek ularni algebraik usullar yordamida ishlov berishga imkon beradi. Shuning uchun kub matritsalar nazariyasi zamonaviy matematika va amaliy hisoblashning yangi yoʻnalishlaridan biri hisoblanadi.

Masala qoʻyilishi. Ikki oʻlchamli matritsalar ustidagi amallar — qoʻshish, ayirish va koʻpaytirish — qat’iy belgilangan qoidalar boʻyicha bajariladi. Biroq bu amallarni uchoʻlchamli matritsalarga umumlashtirishda muayyan qiyinchiliklar paydo boʻladi. Bu kub matritsa elementlari oʻrtasidagi oʻzaro bogʻliqlik nafaqat qatorlar va ustunlar, balki chuqurlik bo‘yicha ham hisobga olinishi bilan bog‘liq. Shuning uchun ko‘paytirish amalini to‘g‘ri kiritish uchun yangi algebraik yondashuv talab etiladi.

$A = (a_{ijk})$,va $B = (b_{ijk})$kub matritsalar berilgan bo‘lsin. Ularning ko‘paytmasi $C = (c_{ijk})$quyidagicha aniqlanishi mumkin:

$c_{ijk} = \sum_m \sum_n a_{imn}\, b_{njk}$bu yerda yig‘indi mos keluvchi bir xil o‘lchamdagi indekslar bo‘yicha bajariladi. Bu formula ko‘paytirish amali uch o‘lchamli fazoda amalga oshiriladiganligini ko‘rsatadi, bu esa ko‘p o‘lchamli o‘zaro bog‘liqliklarni ifodalashga imkon beradi [1-4].

Ushbu formulaning tahlili shuni ko‘rsatadiki, kub matritsalarda ko‘paytirish amali elementlarning fazoviy joylashuvi va indekslar o‘rtasidagi algebraik bog‘liqlikni hisobga olishi bilan oddiy chiziqli amaldan farqlanadi. Bunday yondashuvni amaliy masalalarda qo‘llash uchun tegishli kompyuter algoritmlarini ishlab chiqish zarur.

Kubik matritsalar

Endi **kubik matritsa** tushunchasini kiritamiz. Faraz qilaylik

$$Q = (q_{ijk})_{i,j,k=1}^{m}$$

matritsa — bu R^{m^3} fazosidagi uch o‘lchovli vektor bo‘lib, uni quyidagicha yozish mumkin:

$$Q = \sum_{i,j,k=1}^{m} q_{ijk} E_{ijk},$$

bu yerda — E_{ijk} kubik birlik (bazis) matritsa, ya’ni E_{ijk} ning (i, j, k) −ko‘rsatkichi 1 ga teng, qolgan barcha elementlari esa 0 ga teng bo‘ladi.

Agar

$$Q_i = (q_{ijk})_{i,j,k=1}^{m}$$

deb belgilasak, unda kubik matritsa Q quyidagi ko‘rinishda yozilishi mumkin:

$$Q = (Q_1 \mid Q_2 \mid \cdots \mid Q_m).$$

Ya'ni, Q kubik matritsa o'zining m ta **kvadrat bo'linmalari** (yoki "kesimlari") $Q_{1,}Q_2, \dots, Q_m$ orqali ifodalanadi. Har bir Q_i matritsa kubik matritsaning ma'lum bir o'lchamdagi "kesimi" bo'lib, ular birgalikda butun kubik tuzilmani tashkil etadi.

Faraz qilaylik, C — bu maydon F ustidagi barcha kubik matritsalar to'plami bo'lsin. Unda C fazosi o'lchami m^3 bo'lgan chiziqli fazo hisoblanadi. Ya'ni, har qanday ikki kubik matritsa $A = (a_{ijk})$ va $B = (b_{ijk})$ uchun quyidagi tengliklar o'rinlidir:

$$A + B = (a_{ijk} + b_{ijk}) \in \mathrm{C}, \quad \lambda A = (\lambda a_{ijk}) \in \mathrm{C}$$

bu yerda $\lambda \in F$— skalyar hisoblanadi.

Maksimov ko'paytmalari

Maksimov tomonidan taklif qilingan ko'paytma qoidalariga ko'ra ([5], shuningdek qarang [3],[4 − 7]), bazis matritsalar E_{ijk} uchun quyidagi amallar aniqlanadi:

$$E_{ijk} *_0 E_{lnr} = \delta_{kl}\delta_{jn}E_{ijr} \tag{2}$$

bu yerda δ_{kl} — Kroneker belgisi

Shunday qilib, har qanday ikkita kubik matritsa $A = (a_{ijk}), B = (b_{ijk}) \in C$ uchun, ularning ko'paytmasi quyidagicha belgilanadi:

$$A *^0 B = (c_{ijk}),\ c_{ijr} = \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}b_{kjr} \tag{3}$$

Endi $I = \{1, 2, \dots, m\}$ to'plamni olaylik. Quyidagi ifodani qaraymiz:

$$E_{ijk} *_a E_{lnr} = \delta_{kl}E_{ia(j,n)r} \tag{4}$$

bu yerda $a: I \times I \to I$, $(j, n) \mapsto a(j, n) \in I$ — istalgan assotsiativ ikkilik amal, δ_{kl} esa Kroneker belgisi. Shuni ta'kidlash kerakki, (2) formulasi (4)ning xususiy holi emas. O_m bilan I to'plamdagi barcha assotsiativ ikkilik amallar to'plamini belgilaymiz.

Ko'paytmaning umumiy formulasi (4) ni bilinearlik asosida kengaytirish orqali olinadi, ya’ni har qanday ikki kubik matritsa $A=(a_{ijk}), B=(b_{ijk})\in C$ uchun $A*_a B=(c_{ijk})$matritsa quyidagicha aniqlanadi:

$$c_{ijr}=\sum_{l,n:\,a(l,n)=j}\sum_k a_{ilk}b_{knr}.$$

Bu formula har qanday assotsiativ amal a uchun to‘g‘ri bo‘ladi.

[5]- manbaga asosan, $P=(\mathrm{p}_{ijk})_{i,j,k=1}^m$ kubik matritsa (1,2)**-stoxastik** deyiladi, agar u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

$$p_{ijk}\geq 0,\qquad \sum_{i,j=1}^m p_{ijk}=1\quad \text{har bir k uchun}$$

(1,3)**-stoxastik** deyiladi, agar

$$p_{ijk}\geq 0,\qquad \sum_{i,k=1}^m p_{ijk}=1,\quad \text{har bir j uchun}$$

(2,3) $-$**stoxastik** deyiladi, agar

$$p_{ijk}\geq 0,\qquad \sum_{j,k=1}^m p_{ijk}=1,\quad \text{har bir i uchun}$$

3 $-$**stoxastik** deyiladi, agar

$$p_{ijk}\geq 0,\qquad \sum_{k=1}^m p_{ijk}=1,\quad \text{har bir i, j uchun}$$

Oxirgi holat birinchi va ikkinchi indekslarga nisbatan ham xuddi shunday ifodalanishi mumkin.

Endi aniq ko‘paytirish asosidagi bazis matritsalarni (D tipdagi) quyidagicha aniqlaymiz:

$$E_{ijk}\cdot E_{lnr}=\begin{cases}E_{ijk}, & agar \quad k=l,\\ 0, & aks\ holda.\end{cases}$$

Ushbu ko‘paytirishni istalgan kubik matritsalarga yoyadigan bo‘lsak,

$$A=(a_{ijk})_{i,j,k=1}^m,\quad B=(b_{ijk})_{i,j,k=1}^m,\quad C=(c_{ijk})_{i,j,k=1}^m$$

bo`ladi.

Shunda $C = AB$ ko‘rinishidagi matritsa elementlari quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$c_{ijr} = \sum_{k,n=1}^{m} a_{ijk} b_{knr}.$$

parametrlar $s \geq 0$, $t \geq 0$ vaqt sifatida qaraladi.

Faraz qilaylik, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$ bo‘lsin va $M^{[s,t]} = \left(P_{ijk}^{[s,t]}\right)_{i,j,k=1}^{\mathrm{m}}$ ikki parametrli kubik matritsa bo‘lsin.

1-Ta’rif . $\{M^{[s,t]}:\ s,t \in \mathbb{R}_+\}$ oilasi **Markov jarayoni** (yoki tur $(\sigma|\mu)$ dagi **kvadratik stoxastik jarayon**, ya’ni QSP) deyiladi, agar har bir s va $t$uchun kubik matritsa $M^{[s,t]}$ $\sigma -$ stoxastik bo‘lsa va u **Kolmogorov–Chapman tenglamasini** (kubik matritsalar uchun) qanoatlantirsa, ya’ni

$$M^{[s,t]} = M^{[s,\tau]} *_\mu M^{[\tau,t]}, \qquad \text{barcha} \quad 0 \leq s < \tau < t \tag{5}$$

bu yerda $*_\mu$ — μ turdagi ko‘paytirish amalini bildiradi.

1-Teorema . ([3]) Faraz qilaylik, $\{A^{[t]} = (a_{ij}^{[t]}, t \geq 0)\}$ — barcha t lar uchun **teskari matritsaga ega** $m \times m$ o‘lchamdagi kvadrat matritsalar oilasi bo‘lsin. $\left(A^{[t]}\right)^{-1} = (b_{ij}^{[t]})$ uning teskari matritsasi deb belgilansin.

Endi $\mathcal{B}(s) = \left(\beta_{ijk}^{(s)}\right)$ — kubik matritsa bo‘lib, $\beta_{ijk}^{(s)},\ i,j,k = 1,\dots,m,$ — ixtiyoriy funksiyalar bo‘lsin, shundayki

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_{ijk}^{(s)} = a_{ik}^{[s]}, \text{har qanday i, k, va s uchun}$$

Unda kubik matritsa

$$M^{[s,t]} = \left(\sum_{k=1}^{m} \beta_{ijk}^{(s)} b_{kr}^{[t]}\right)_{i,j,r=1}^{m} \tag{6}$$

algebralar oqimini hosil qiladi, ya’ni (5) $-$tenglamani (D turdagi) qanoatlantiradi.

Nazariy muhokama. Kub matritsalar nazariyasining rivojlanishi chiziqli algebra va tenzor tahlili oʻrtasidagi bogʻliqlikni mustahkamlaydi. Har bir kub matritsa amalda uch indeksli tenzor sifatida koʻrib chiqilishi mumkin. Shuning uchun koʻpaytirish amalini toʻgʻri aniqlash nafaqat nazariy, balki hisoblash ahamiyatiga ham ega. Bu yondashuv fazoviy modellarni qurish, raqamli tasvirlarni ishlov berish, neyron tarmoqlarni oʻqitish va koʻp oʻlchamli maʼlumotlar tahlili masalalarini yechishda samarali qoʻllaniladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2013). Matrix Computations. Johns Hopkins University Press.
2. Kolda, T. G., & Bader, B. W. (2009). Tensor Decompositions and Applications. SIAM Review, 51(3), 455–500.
3. L. Qi. (2005). Eigenvalues of a Real Supersymmetric Tensor. Journal of Symbolic Computation, 40(6), 1302–1324.
4. Ahmedov, A. (2020). CHiziqli algebra va uning amaliy qoʻllanishlari. Toshkent: «Fan» nashriyoti.
5. Kimsanov, M., & Qodirov, B. (2022). Matritsalar nazariyasi va uning amaliy masalalari. Samarqand: Samarqand davlat universiteti nashriyoti.
6. Agliari A., Bischi G-I, Gardini L., Sushko I. Introduction to discrete nonlinear dynamical systems // University of Trento, 2009.
7. Banerjee S., Karthik M.S., Yuan G., Yorke J.A. Bifurcations in One-Dimensional Piecewise Smooth Maps – Theory and Applications in Switching Circuits // IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Fundamental Theory And Applications, Vol. 47, № 3 (2000), pp.389-394.
8. Barwell A.D. ω-Limit Sets of Discrete Dynamical Systems // A thesis of doctor of Philosophy, The University of Birmingham, 2010.