DIFFERENSIAL O‘YINDA KAFOLATLANILGAN QO‘YILMASH VAQTI: HILBERT FAZOSI L2L^2L2 DAGI IKKILIK DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING CHEKSIZ TIZIMI

Turg'unova Feruza Abdusattor qizi

fturgunova401@gmail.com

Andijon davlat universiteti matematika va mexanika fakulteti matematika yo'nalishi 1-kurs magistranti

Ilmiy rahbarim: ***Xolmurodjon Qo'shaqov***

Annotatsiya. Ushbu maqolada Hilbert fazosi L2L^2L2 dagi cheksiz o‘lchamli dinamik tizimlar uchun differensial o‘yinlar nazariyasi ko‘rib chiqiladi. Ikkilik differensial tenglamalarning cheksiz tizimi asosida kafolatlangan qo‘yilmash (trajektoriyalarni oldindan belgilangan to‘plamga olib kelish) vaqti aniqlanadi. Bunda boshqariluvchi jarayonlar uchun optimal strategiyalar va qarshi strategiyalar mavjudligi, shuningdek, kafolatlangan qo‘yilmash vaqtining mavjudligi isbotlanadi

Kalit so‘zlar: Differensial o‘yinlar; kafolatlangan qo‘yilmash vaqti; Hilbert fazosi; L2L^2L2 fazosi; cheksiz tizimlar; ikkilik differensial tenglamalar; optimal strategiya; Bellman–Isaacs tenglamasi; Galerkin aproksimatsiyasi; barqarorlik nazariyasi; boshqaruv tizimlari.

Abstract. This article examines the theory of differential games for infinite-dimensional dynamic systems in the Hilbert space L2L^2L2. Based on an infinite system of binary differential equations, the guaranteed hitting time (the time required to bring trajectories to a predetermined set) is determined. The existence of optimal strategies for the control processes and counter-strategies is established, as well as the existence of the guaranteed hitting time.

Keywords: Differential games; guaranteed hitting time; Hilbert space; L2L^2L2 space; infinite-dimensional systems; binary differential equations; optimal strategy; Bellman–Isaacs equation; Galerkin approximation; stability theory; control systems.

Аннотация. В данной статье рассматривается теория дифференциальных игр для бесконечномерных динамических систем в гильбертовом пространстве L2L^2L2. На основе бесконечной системы бинарных дифференциальных уравнений определяется гарантированное время достижения (время, необходимое для приведения траекторий в заранее заданное множество). Доказано существование оптимальных стратегий для управляемых процессов и контрстратегий, а также существование гарантированного времени достижения.

Ключевые слова: дифференциальные игры; гарантированное время достижения; гильбертово пространство; пространство L2L^2L2; бесконечномерные системы; бинарные дифференциальные уравнения; оптимальная стратегия; уравнение Беллмана–Айзекса; аппроксимация Галёркина; теория устойчивости; системы управления.

Kirish. Differensial oʻyinlar nazariyasi — bu ikki yoki undan ortiq raqibning dinamik jarayonda oʻz maqsadiga erishish uchun boshqaruv strategiyalarini tanlashini oʻrganuvchi matematikaning yoʻnalishidir. Klassik holda differensial oʻyinlar chekli oʻlchamli fazoda oʻrganilgan boʻlsa, koʻplab amaliy masalalar, xususan, issiqlik almashinuvi, suyuqliklar mexanikasi, signallarni boshqarish va kvant tizimlari **cheksiz oʻlchamli fazo**da modellashtiriladi. Bunday holatda tabiiy fazo sifatida Hilbert fazosi L2L^2L2 ishlatiladi.

Qo‘yilmash vaqti — bu tizimning trayektoriyasini berilgan to‘plamga **kafolatli tarzda** olib kelish uchun zarur bo‘lgan minimal vaqt. Ushbu maqolada ikkilik differensial o‘yinlarda kafolatlangan qo‘yilmash vaqtining mavjudligi va hisoblash usullari ko‘rib chiqiladi.

2. Masalaning matematik qo‘yilishi

Faraz qilaylik, tizimning dinamikasi quyidagicha berilgan bo‘lsin:

dx(t)dt=Ax(t)+Bu(t)+Cv(t),x(0)=x0∈L2(Ω),\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + B u(t) + C v(t), \quad x(0) = x_0 \in L^2(\Omega),dtdx(t)=Ax(t)+Bu(t)+Cv(t),x(0)=x0∈L2(Ω),

bu yerda:

- x(t)x(t)x(t) — holat vektori, x(t)∈L2(Ω)x(t) \in L^2(\Omega)x(t)∈L2(Ω);
- AAA — cheksiz o‘lchamli chiziqli operator (ko‘pincha qisman differensial operator);
- u(t)∈Uu(t) \in Uu(t)∈U — boshqaruvchi tomonning nazorat funksiyasi (1-o‘yinchi);
- v(t)∈Vv(t) \in Vv(t)∈V — qarshi tomonning qarshi strategiyasi (2-o‘yinchi);
- BBB va CCC — chiziqli chegaralangan operatorlar.

Maqsad — tizimni

M={x∈L2(Ω) : ∥x−x∗∥≤ε}M = \{ x \in L^2(\Omega) \,:\, \| x - x^* \| \leq \varepsilon \}M={x∈L2(Ω):∥x−x∗∥≤ε}

to‘plamiga **minimal kafolatlangan vaqt** ichida olib kelish.

3. Kafolatlangan qo‘yilmash vaqti tushunchasi

Ta'rif. Agar ixtiyoriy qarshi strategiya v(·)v(\cdot)v(·) uchun shunday boshqaruv u(·)u(\cdot)u(·) mavjud bo'lsa,ki, trayektoriya x(t)x(t)x(t) vaqtning ma'lum bir TTT da MMM to'plamiga tushsa, u holda TTT **kafolatlangan qo'yilmash vaqti** deyiladi.

Formal ravishda:

∀v(·)∈V, ∃u(·)∈Ushundaykix(T;x0,u,v)∈M.\forall v(\cdot) \in V, \, \exists u(\cdot) \in U \quad \text{shundayki} \quad x(T; x_0, u, v) \in M.∀v(·)∈V,∃u(·)∈Ushundaykix(T;x0,u,v)∈M.

Minimal bunday vaqt

T∗(x0)=inf{T≥0 : ∀v(·), ∃u(·), x(T;x0,u,v)∈M}T^*(x_0) = \inf \left\{ T \ge 0 \,:\, \forall v(\cdot), \, \exists u(\cdot), \, x(T; x_0, u, v) \in M \right\}T∗(x0)=inf{T≥0:∀v(·),∃u(·),x(T;x0,u,v)∈M}

bo'lib, bu **optimal kafolatlangan qo'yilmash vaqti** deyiladi.

4. Hilbert fazosida yechim mavjudligi

Hilbert fazosi L2(Ω)L^2(\Omega)L2(Ω) separabil bo'lgani uchun, tizimni Galerkin usuli yordamida chekli o'lchamli aproksimatsiya orqali yechish mumkin. Quyidagi tizimni ko'rib chiqamiz:

dxn(t)dt=Anxn(t)+Bnu(t)+Cnv(t),\frac{d x_n(t)}{dt} = A_n x_n(t) + B_n u(t) + C_n v(t),dtdxn(t)=Anxn(t)+Bnu(t)+Cnv(t),

bu yerda An,Bn,CnA_n, B_n, C_nAn,Bn,Cn — Galerkin aproksimatsiyalangan operatorlar, xnx_nxn esa chekli o'lchamli proyeksiya.

Teorema (eksistensiya). Agar AAA — cheklangan yoki yarimcheklangan o'zgarmas operator bo'lsa, UUU va VVV kompakt to'plamlar bo'lsa, u holda ixtiyoriy x0∈L2(Ω)x_0 \in L^2(\Omega)x0∈L2(Ω) uchun kafolatlangan qo‘yilmash vaqti T∗(x0)T^*(x_0)T∗(x0) mavjud.

Isbot g‘oyasi:

Galerkin aproksimatsiyasida yechimlar mavjudligi va ularning kompaktligi (Arzela–Ascoli), keyin esa limit o‘tish orqali L2L^2L2 fazoda yechim mavjudligi ta’minlanadi.

5. Optimal strategiyalar

Optimal boshqaruv strategiyasi u^(t)\hat{u}(t)u^(t) va qarshi strategiya v^(t)\hat{v}(t)v^(t) **Ekeland printsipi** va **Bellman–Isaacs tenglamasi** yordamida topiladi. U holda

minu∈Umaxv∈V⟨p(t),Bu+Cv⟩=maxv∈Vminu∈U⟨p(t),Bu+Cv⟩,\min_{u \in U} \max_{v \in V} \langle p(t), B u + C v \rangle = \max_{v \in V} \min_{u \in U} \langle p(t), B u + C v \rangle,u∈Uminv∈Vmax⟨p(t),Bu+Cv⟩=v∈Vmaxu∈Umin⟨p(t),Bu+Cv⟩,

bu yerda p(t)p(t)p(t) — ko‘makchi qo‘shma tizim uchun adjoint o‘zgaruvchi.

Natijada optimal strategiya:

u^(t)=argminu∈U⟨p(t),Bu⟩,v^(t)=argmaxv∈V⟨p(t),Cv⟩.\hat{u}(t) = \arg\min_{u \in U} \langle p(t), B u \rangle, \qquad \hat{v}(t) = \arg\max_{v \in V} \langle p(t), C v \rangle.u^(t)=argu∈Umin⟨p(t),Bu⟩,v^(t)=argv∈Vmax⟨p(t),Cv⟩.

6. Kafolatlangan qo‘yilmash vaqtini baholash

Agar tizim stabil bo‘lsa (AAA spektrining haqiqiy qismi manfiy bo‘lsa), u holda kafolatlangan qo‘yilmash vaqti quyidagicha baholanadi:

T∗(x0)≤1λmin(A)ln∥x0−x∗∥ε,T^*(x_0) \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(A)} \ln \frac{\| x_0 - x^* \|}{\varepsilon},T∗(x0)≤λmin(A)1lnε∥x0−x∗∥,

bu yerda λmin(A)\lambda_{\min}(A)λmin(A) — operator AAA spektrining eng katta manfiy moduli.

7. Xulosa

Hilbert fazosi L2L^2L2 dagi ikkilik differensial tenglamalarning cheksiz tizimi uchun kafolatlangan qo‘yilmash vaqti mavjudligi va uni Galerkin aproksimatsiyasi orqali hisoblash mumkinligi ko‘rsatildi. Optimal strategiyalar Bellman–Isaacs tenglamalari yordamida aniqlanadi. Natijalar nazariy jihatdan barqaror boshqaruv tizimlarini loyihalash, issiqlik va suyuqliklar mexanikasida optimal ta’sir ko‘rsatish masalalarida qo‘llanishi mumkin.

Adabiyotlar

1. Isaacs, R. *Differential Games*. Wiley, 1965.
2. Krasovskii, N. N., Subbotin, A. I. *Game-Theoretical Control Problems*. Springer, 1988.
3. Lions, J. L. *Optimal Control of Systems Governed by PDEs*. Springer, 1971.
4. Barbu, V. *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*. Noordhoff, 1976.
5. Bressan, A., Piccoli, B. *Introduction to the Mathematical Theory of Control*. AIMS, 2007.