ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕР , СООТВЕТСТВУЮЩИЕ КВАДРАТИЧНЫХМ СТОХАСТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРЫ.

Х.Ж.Мейлиев *(Иктисодиёт ва Педагогика Университети).*

Фахритдинова Г.И.*(Ахборот Технологийаси ва Менежмент Университети магестр).*

Анотация. Задача изучения свойств мер, порожденных квадратичными операторами, достаточно сложна и требует громоздких вычислений. В этой статей мы ограничимся изучением мер, соответствующих двум квадратичным операторам, которые описывают некоторые модели наследственной передачи.

Ключевые слова. Свойств, мер, квадратичный, оператор, симплекс, пространство, распределений, элемент, множества, последовательность, координатой функцией, подмножество, прямого произведения, алгебра композициея.

Пусть (E,m) произвольное пространство с мерой. Рассмотрим пространство $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}E_i$, где $E_i=E$ для всех натуральных i. Одной из важных проблем как в теории меры, так и в теории вероятностей является задача построения меры P на Ω, согласованной с мерой m на E. Для этого достаточно по теореме Колмогорова [6] задать согласованное семейство конечномерных распределений. Так как это конструкция необходима нам для дальнейшего изложения, приведем её для случая конечного множества E[4].

Пусть $E=\{1,2,...,N\}$ и $m(\{i\})=P_i$ - вероятностная мера на E, т.е. $\mathrm{P_i}\geq 0$ и $\sum_{l=1}^{N}p_l=1$. Пусть $\Omega=\Pi_{l=1}^{\infty}E_l$, где $E_i=E$ для всех натуральных i. Произвольный элемент множества Ω является бесконечной последовательностью $\omega = (\omega_1, \omega_2, ...)$ элементов множества E. Пусть ξ_n - функция, ставящая в соответствие точке $\omega \in \Omega$ значение ω_n ее n-й координаты. Функцию ξ_n называют n-й координатой функцией. Пусть $F - \sigma$ алгебра, порожденная совокупностью всех конечномерных цилиндров, т.е. множеств вида

$$\{\omega : (\xi_n(\omega), \xi_{n+1}(\omega), ..., \xi_{n+k-1}(\omega)) \in A\} = \{\omega : (\omega_n, \omega_{n+1}, ... \omega_{n+k-1}) \in A\}$$

где A-подмножество прямого произведения $E^k = \prod\limits_{l=1}^{k} E_l$.

Цилиндрическое множество называется тонким, если его основание A является одноточечным подмножеством соответствующего конечного прямого произведения. Очевидно, σ -алгебра F порождается также совокупностью всех “тонких” цилиндров, т.е. множеств вида

$$\{\omega : \xi_n(\omega) = l_1, \xi_{n+1}(\omega) = l_2, ..., \xi_{n+k-1}(\omega) = l_k\},$$

где i_j-элемент множества E, $n \le j \le n+k$.

В силу этого замечания мера P на (Ω, F) однозначно определяется своими значениями

$$p_n(l_1, l_2, ..., l_k) = P\{\omega : \xi_n(\omega) = l_1, \xi_{n+1}(\omega) = l_2, ..., \xi_{n+k-1}(\omega) = l_k\} \qquad (1)$$

на этих цилиндрах, где n-номер первой фиксированной координаты тонкого цилиндра и k-размерность цилиндра. По теореме Колмогорова [6], если для множества функций $p_n(l_1, l_2, ..., l_k)$ справедливы следующие условия согласования

$$\begin{cases} p_n(l_1,l_2,...,l_k)\geq 0 \\ \sum_{l=1}^{N} p_n(l_1,l_2,...,l_k,l) = p_n(l_1,l_2,...,l_k) \\ \sum_{l=1}^{N} p_n(l) = 1 \end{cases} \qquad (2)$$

при всех k,n и $l_j \in E, 1\leq j\leq k$, то существует единственная вероятностная мера P на F, для которой имеет место (2); кроме того, если

$$p_n(l_1,l_2,...,l_k) = \sum_{l=1}^{N} p_n(l,l_1,l_2,...,l_k) \qquad (3)$$

при всех k,n и $l_j \in E, 1\leq j\leq k$, то мера P сохраняется при преобразовании сдвига.

Таким образом, основную сложность при построении меры P на F составляет указание способа задания семейства функций $\{p_n(l_1,l_2,...,l_k),\ n\ и\ k\ натуральные\}$, удовлетворяющих условию (2). Наиболее полно изучены следующие два способа построения семейства функции $p_n(l_1,l_2,...l_k)$.

Схема Бернулли. Пусть $m(\{l\}) = p_l$ - распределения на $E=\{1,2,...,N\}$. Если положить

$$p_n(l_1,l_2,...,l_k) = p_{l_1} p_{l_2} ... p_{l_k} \qquad (4)$$

т.е. $p_n(l_1,l_2,...,l_k)$ не зависит от n, то имеют место соотношения (2), (3). Соответствующая (4) мера Р называется Бернуллиевской и в этом случае последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует цепь Бернулли, т.е. последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

2. **Схема Маркова**. Пусть $\Pi = (p_{lj})_{l,j=1}^{N}$ -стохастическая по строкам матрица. Если положить

$$p_n(l_1, l_2, ..., l_k) = p_{l_1} p_{l_1 l_2} \dots p_{l_{k-1} l_k} \qquad (5)$$

т.е. $p_n(l_1, l_2, ..., l_k)$ не зависит от n, то имеют место соотношения (2). Соответствующая (5) мера P называется Марковской. Если вектор вероятностей $p = (p_1, p_2, ..., p_N)$ удовлетворяет условию $P\Pi = P$, то будет иметь место соотношение (3). В этом случае последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует стационарную цепь Маркова.

В (2) был предложен новый способ построения семейства функций $p_n(l_1, l_2, ..., l_k)$, основанный на применении квадратичных операторов.

Пусть $E = \{1, 2, ..., N\}$-конечное множество. Для квадратичного оператора $V : S^{N-1} \to S^{N-1}$ и произвольной точки симплекса $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in S^{N-1}$ положим $x^{(k+1)} = Vx^{(k)}$. На одномерных цилиндрических множествах функции $p_n(l)$ определим следующим образом:

$$p_n(l) = x_l^{(n-1)} \qquad (6)$$

для всех натуральных n и $l \in E$. Так как $x^{(n)} \in V^{(n)}(S^{N-1}) \subset S^{N-1}$, то конструкция становится более простой, если квадратичный оператор V сюрьективен, т.е. когда $V^{(n)}(S^{N-1}) = S^{N-1}$. Очевидно из (6) следует $\sum_{l=1}^{N} p_n(l) = 1$, так как $x^{(n-1)} \in S^{N-1}$.

Таким образом, одно из условий (2)имеет место.

Для произвольных тонких цилиндров, функции $p_n(l_1, l_2, ..., l_k)$ при $k > 1$ определим образом

$$p_n(l_0,l_1,...,l_k)=x_{l_0}^{(n)}\sum_{m_1,...,m_k=1}^{N} p_{l_0m_1,l_1}\cdot p_{l_1m_2,l_2}\cdot p_{l_2m_3,l_3}...p_{l_{k-1}m_k,l_k}\ x_{m_1}^{(n)}\cdot x_{m_2}^{(n+1)}....x_{m_k}^{(n+k-1)} \quad (7)$$

По построению функции (6)-(7) зависят от выбора начального распределения $x^{(0)}\in S^{N-1}$ на E.

Первое условия (2), очевидно, выполняется. Покажем справедливость второго условия:

$$\sum_{l=1}^{N} p_n(l_0,l_1,...,l_k,l)=x_{l_0}^{(n)}\sum_{m_1,...,m_k,m_{k+1}=1}^{N} p_{l_0m_1,l_1}\cdot p_{l_1m_2,l_2}\cdot p_{l_2m_3,l_3}\cdots p_{l_{k-1}m_k,l_k}\ p_{l_km_{k+1},l}$$
$$x_{m_1}^{(n)}\cdot x_{m_2}^{(n+1)}...x_{m_{k+1}}^{(n+k)}=x_{l_0}^{(n)}\sum_{m_1,...,m_k=1}^{N} p_{l_0m_1,l_1}\cdot p_{l_1m_2,l_2}\ ...p_{l_{k-1}m_k,l_k}$$
$$\cdot x_{m_1}^{(n)}\cdot x_{m_2}^{(n+1)}...x_{m_k}^{(n+k-1)}=p_n(l_0,l_1,...,l_k)$$

так как $\sum_{l=1}^{N} p_{l_km_{k+1},l}=1$ и $\sum_{m_{k+1}=1}^{N} x_{m_{k+1}}^{(n+k)}=1$.

Таким образом, существует единственная вероятностная мера P, определенная функциями (6)-(7), которую естественно назвать мерой, порожденной квадратичным операторам V и начальным распределением $x^{(0)}\in S^{N-1}$.

Задача изучения свойств мер, порожденных квадратичными операторами, достаточно сложна и требует громоздких вычислений. В этой статей мы ограничимся изучением мер, соответствующих двум квадратичным операторам, которые описывают некоторые модели наследственной передачи, предложенной Элстоном и Стюартом[4]. Передача признака от родителей к потомству описывается тремя показателями вероятности этой передачи.

Рассмотрим теперь модель наследования для диплоидных организмов. В этом случае генотипы определяются парой аллелей A и α, т.е. в этом случае существуют три генотипа AA, Aa и aa. Квадратичный оператор, определяющей модель наследования в этом случае определяются следующими переходными вероятностями: $P_{AAAA,AA}, P_{AAAa,AA}, P_{AaAa,AA}, P_{AAaa,AA}$ и.т.д.-всего 27-переходных вероятностей. В соответствии с гипотезой о менделевском типе наследования, очевидно,

$$P_{AAAA,AA} = 1,\ P_{AAAa,AA} = 1/2, P_{AaAa,AA} = 1/4,\ P_{AAaa,AA} = 0,\ldots$$

для упрощения записи вместо $\{AA, Aa, aa\}$ будем рассматривать множество $E = \{1,2,3\}$. Тогда

$$\begin{array}{lll}
P_{11,1} = 1 & P_{12,1} = P_{21,1} = 1/2 & P_{13,1} = P_{31,1} = 0 \\
P_{11,2} = 0 & P_{12,2} = P_{21,2} = 1/2 & P_{13,2} = P_{31,2} = 1 \\
P_{11,3} = 0 & P_{12,3} = P_{21,3} = 1/2 & P_{13,3} = P_{31,3} = 0 \\
P_{22,1} = 1/4 & P_{23,1} = P_{32,1} = 0 & P_{33,1} = 0 \\
P_{22,2} = 1/2 & P_{23,2} = P_{32,2} = 1/2 & P_{33,2} = 0 \\
P_{22,3} = 1/4 & P_{23,3} = P_{32,3} = 1/2 & P_{33,3} = 1
\end{array} \qquad (8)$$

Отметим, что этот менделевский квадратичный оператор не является сюрьективным [4]. В этом случае

$$\begin{cases}
x_1^{(1)} = \left(x_1^0 + x_2^0 / 2\right)^2 \\
x_2^{(1)} = 2\left(x_1^0 + x_2^0 / 2\right)\left(x_3^0 + x_2^0 / 2\right) \\
x_3^{(1)} = \left(x_3^0 + x_2^0 / 2\right)^2
\end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases}
x_1^{(1)} = \left(x_1^1 + x_2^1 / 2\right)^2 \\
x_2^{(1)} = 2\left(x_1^1 + x_2^1 / 2\right)\left(x_3^1 + x_2^1 / 2\right) \\
x_3^{(1)} = \left(x_3^1 + x_2^1 / 2\right)^2
\end{cases} \qquad (10)$$

или, подставляя в (10) выражения (9) и упрощая, получим

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \left(x_1^0 + x_2^0/2\right)^2 \\ x_2^{(2)} = 2\left(x_1^0 + x_2^0/2\right)\left(x_3^0 + x_2^0/2\right) \\ x_3^{(2)} = \left(x_3^0 + x_2^0/2\right)^2 \end{cases}$$

Таким образом, для любого начального распределения $x^{(0)} = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)$

$$x^{(k)} = x^{(1)} \qquad (11)$$

для любого $k > 1$, т.е. со второго шага, наступает стабилизация частот генотипов AA, Aa и aa что соответствует закону Харди- Вайнберга.

Пусть $x^{(0)} = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right) \in S^3$ начальное распределение на $E = \{1,2,3\}$ и $P_{x^{(0)}}$ - вероятностная мера, соответствующая менделевскому оператору (8). Такие меры будем называть менделевскими.

Теорема 1. Для менделевских мер $P_{x^{(0)}}$ при любом $x^{(0)} \in S^3$ и любых натуральных k и l имеет место следующее равенство:

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = l_0, \xi_{k+l} = l_1\right) = P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = l_0\right) P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l} = l_1\right) + \frac{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l} = l_1\right)}{2^{l-1}} a \qquad (12)$$

где $a \in M = \left\{1/2x_2^{(1)}, \left(x_3 + 1/2x_2\right)\left(x_3 - x_1\right), -1/2\left(x_3 + 1/2x_2\right)\left(x_3 - x_1\right),\right.$

$\left. -x_3^{(1)}, 1/2\left(x_3 - x_1\right)^2, 1/2\left(x_1 + 1/2x_2\right)\left(x_3 - x_1\right), -\left(x_1 + 1/2x_2\right)^2 \right\}.$

Доказательство. Доказательство теоремы проведем индукцией по l.

$$\left\{\omega : \xi_k(\omega) = l_0, \xi_{k+1}(\omega) = l_1, \ldots, \xi_{k+l}(\omega) = l_l\right\}$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\left\{\omega : \xi_k(\omega) = l_0, \xi_{k+1}(\omega) = l_1, \ldots, \xi_{k+l}(\omega) = l_l\right\}\right) = x_{l_0}^{(k)} \sum_{m_1, \ldots, m_l = 1}^{N} P_{l_0 m_1} \cdot P_{l_1 m_2, l_2} \cdot \\ \cdot \ldots P_{l_{l-1} m_l, l_l} \cdot x_{m_1}^{(k)} \cdot x_{m_2}^{(k+1)} \ldots x_{m_l}^{(k+l-1)}, \qquad (13)$$

откуда $P_{x^{(0)}}\left(\{\omega:\xi_k(\omega)=l_0,\xi_{k+l}(\omega)=l_1\}\right)=x_l^{(k)}\sum_{m=1}^{N}P_{l_0m,l_1}x_m^{(k)}$ (14)

При $l=1$ в силу (8), (9), (10) и (13) имеем

$$P_{x^{(0)}}\left(\{\omega:\xi_k(\omega)=1,\xi_{k+l}(\omega)=1\}\right)=x_1^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{1m,1}x_m^{(k)}=x_1^{(1)}\left(x_1^{(1)}+1/2x_2^{(1)}\right)=$$
$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=1)+1/2x_1^{(1)}x_2^{(1)}=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=1)+1/2P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\{\omega:\xi_k(\omega)=2,\xi_{k+l}(\omega)=2\}\right)=x_2^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{2m,2}x_m^{(k)}=x_2^{(1)}1/2\left(x_1^{(1)}+x_2^{(1)}+x_3^{(1)}\right)=$$
$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=2)+1/2x_2^{(1)}(x_3-x_1)^2=$$
$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=2)+1/2P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)(x_3-x_1)^2$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\{\omega:\xi_k(\omega)=3,\xi_{k+1}(\omega)=3\}\right)=x_3^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{3m,3}x_m^{(k)}=x_3^{(1)}\left(x_3^{(1)}+1/2x_2^{(1)}\right)=$$
$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=3)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)+1/2P_{x^{(0)}}(\xi_k=3)x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\{\omega:\xi_k(\omega)=1,\xi_{k+1}(\omega)=2\}\right)=x_1^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{1m,2}x_m^{(k)}=x_1^{(1)}\left(x_3^{(1)}+1/2x_2^{(1)}\right)=$$
$$=x_2^{(1)}x_2^{(1)}+x_1^{(1)}x_3^{(1)}-1/2x_1^{(1)}x_2^{(1)}=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=2)+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)(x_3+1/2x_2)(x_3-x_1)$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\{\omega:\xi_k(\omega)=1,\xi_{k+1}(\omega)=3\}\right)=x_1^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{1m,3}x_m^{(k)}=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)-P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)(x_3+1/2x_2)^2\cdot$$
$$\cdot P_{x^{(0)}}\left(\{\omega:\xi_k(\omega)=2,\xi_{k+1}(\omega)=3\}\right)=x_2^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{2m,3}x_m^{(k)}=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)+P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)$$
$$1/2(x_3+1/2x_2)(x_1-x_3)$$

Предположим, что равенство (12) доказано для натурального $l>1$ и докажем это равенство для ***l+1*** Для этого воспользуемся фундаментальным уравнением (4.A) [5,6] .

$$P_{l_0l_1,k}^{[S,t+1]}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}P_{l_0l_1,k}^{[S,t]}P_{\alpha\beta,k}^{[t,t+1]}x_\beta^{[t]}$$

В нашем случае это уравнение принимает вид

$$P_{l_0 m,k}^{[k,k+l+1]} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} P_{l_0 m,\alpha}^{[k,k+l]} P_{\alpha\beta,l_1}^{[k+l,k+l+1]} x_\beta^{[k+l]} \tag{15}$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\{\omega : \xi_k(\omega) = l_0, \xi_{k+l+1}(\omega) = l_1\}\right) = x_{l_0}^{(k)} \sum_{m=1}^{3} P^{[k,k+l+1]}_{1m,3\, x_m^{(k)}} = x_m^{(k)} = x_{l_0}^{(k)} \sum_{m=1}^{3} \left[\sum_{\alpha,\beta}^{3} P_{l_0 m,\alpha}^{[k,k+l]} P_{\alpha\beta,l_1}^{[k+l,k+l+1]} x_\beta^{[k+l]} \right] x_m^{(k)} =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} x_{l_0}^{(k)} \left[\sum_{m=1}^{3} P_{l_0 m,\alpha}^{[k,k+l]} x_m^{(k)} \right] P_{\alpha\beta,l_1}^{[k+l,k+l+1]} x_\beta^{[k+l]} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} P_{x^{(0)}}\left(\{\xi_k = l_0, \xi_{k+l} = \alpha\}\right) P_{\alpha\beta,l_1}^{[k+l,k+l+1]} x_\beta^{(k)}$$

В силу (11)

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = l_0, \xi_{k+l+1} = l_1\right) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} P_{x^{(0)}} = \left(\{\xi_k = l_0, \xi_{k+l} = \alpha\}\right) P_{\alpha\beta,l_1} x_\beta^{(1)} \tag{16}$$

Теперь, как и в случае $l = 1$ надо перебрать все возможные варианты значений i_0 и i_1. Мы ограничимся рассмотрим только одного случая. Остальные случаи доказываются аналогично. Пусть $l_0 = l_1 = 1$ и $l = 2$.

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = l_0, \xi_{k+2} = 1\right) = \sum_{\alpha=1}^{3} P_{x^{(0)}} = \left(\xi_k = 1, \xi_{k+l} = \alpha\right) \sum_{\beta=1}^{3} P_{\alpha\beta,1} x_\beta^{(1)} = P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 1\right)\left(P_{11,1} x_1^{(1)} + \right.$$
$$\left. + P_{12,1} x_2^{(1)} + P_{13,1} x_3^{(1)}\right) + P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 2\right)\left(P_{21,1} x_1^{(1)} + P_{22,1} x_2^{(1)} + P_{23,1} x_3^{(1)}\right) +$$

$$+ P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 3\right)\left(P_{31,1} x_1^{(1)} + P_{32,1} x_2^{(1)} + P_{33,1} x_3^{(1)}\right) = P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 1\right)\left(x_1^{(1)} + 1/2 x_2^{(1)}\right) +$$
$$+ P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 2\right)\left(1/2 x_1^{(1)} + 1/4 x_2^{(1)}\right) = \left(x_1^{(1)}\right)^3 + \left(x_1^{(1)}\right)^2 x_2^{(1)}/2 + \left(x_1^{(1)}\right)^2 x_2^{(1)}/2 + \left(x_2^{(1)}\right)^2 x_1^{(1)}/4 +$$
$$+ \left(x_1^{(1)}\right)^2 x_1^{(1)}/2 + \left(x_2^{(1)}\right)^2 x_2^{(1)}/4 + \left(x_1^{(1)}\right)^2 \left(x_3 + x_2/2\right)\left(x_3 - x_1\right)/2 + 1/4 x_1^{(1)} x_2^{(1)} \left(x_3 + x_2/2\right)\left(x_3 - x_1\right) =$$
$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1\right) P_{x^{(0)}}\left(\xi = 1\right) x_2^{(1)}$$

Теперь предложим, что для некоторого l справедливы следующие равенства:

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 1\right) = P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1\right) P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+1} = 1\right) + 1/2^l\, P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1\right) x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=2,\xi_{k+1}=2)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=2)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)(x_3-x_1)^2$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=3,\xi_{k+1}=3)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=3)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=3)x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=2)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=2)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)(1/2x_2+x_3)(x_3-x_1)$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=3)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)\left(-(x_2+2x_3)^2\right)$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=2,\xi_{k+1}=2)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=2)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)(x_3-x_1)^2$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=2,\xi_{k+1}=3)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)(1/2x_2+x_3)(x_1-x_3)$$

Легко доказывается также, как и при переходе от $l=1$ к $l=2$, что эти равенства верны для $l+1$.

Для $l+1$ как и в случае $l=1$ и $l=2$ надо перебрать все возможные варианты значений i_0 и i_1 Мы ограничимся рассмотрением только одного случая. Остальные случаи доказываются аналогично. Пусть $i=j=1$ в силу (3.1.15)

$$\begin{aligned}&P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+l+1}=1)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+l}=1)\left(P_{11,1}x_1^{(1)}+P_{12,1}x_2^{(1)}+P_{13,1}x_3^{(1)}\right)+\\&P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+l}=2)=\left(P_{21,1}x_1^{(1)}+P_{22,1}x_2^{(1)}+P_{23,1}x_3^{(1)}\right)+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+l}=3)\left(P_{31,1}x_1^{(1)}+\right.\\&\left.+P_{32,1}x_2^{(1)}+P_{33,1}x_3^{(1)}\right)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+l}=1)\left(x_1^{(1)}+1/2x_2^{(1)}\right)+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+l}=2)\left(1/2x_1^{(1)}+\right.\\&\left.1/4x_2^{(1)}\right)=x_1^{(k)}x_1^{(k+l)}(x_1+1/2x_2+1/2x_2+x_3)+1/2^l x_1^{(k)}(x_1+1/2x_2)(x_3+1/2x_2)\\&(2x_1+x_2+x_3-x_1)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l+1}=1)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)x_2^{(1)}/2\end{aligned}$$

что и требовалось показать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П.С. Введение в теорию групп. М.: Учпедиз, 1938. 125с.

2. Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы, связаной с теорией наследственности. Уч. Зап. Н.И. кафедр. Украины, отд.матем.1924, вып.1.с 83-115.

3. Биллингслей П. Эргодическая теория и информация М: Мир, 1969, с 238.
4.Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.:Мир. 1986,528 с.
5.Генетика и наследственность. // Сб .статей. Мю,1987. 300 с.
6. Колмогоров А.Н.,Основные понятые теории вероятностей. М,1936,138 с.
7. Мейлиев Х.Ж. Крайние точки множества квадратичных операторов, определенных на на S^3. Конференция. Тошкент. ,1996.25-27 апрель-77б.

8. Мейлиев Х.Ж. Об одном свойстве мер, соответствующим менделевским квадратичным операторам. Конференция International conference on some topics of mathematics. October 13-17,1996.Samarkand,P.151-152.
9. Мейлиев Х.Ж. Диссертация некоторых моделях наследования в математической генетике. Ташкент 1998 г.
10.Х.Ж.Мейлиев ОБ ОТНОШЕНИЕ БЕРНУЛЛЕВСКИЕ И МЕНДЕЛЕВСКИЕ МЕРЫ. «ЛУЧШИЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ»2025 Й. 06.24.