MAVZU: TOPOLOGIK FAZO TA'RIFI

TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT UNIVERSITETI
INTERNATIONAL BUSINESS AKADEMIK LITSEYI O'QITUVCHISI
MAKSETOVA ZUHRA KABULOVNA

Bo'sh bo'lmagan X to'plam va uning qandaydir qismlaridan tashkil topgan

$\tau = \{B_\alpha : B_\alpha \subseteq X, \alpha \in A\}$

Oila berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar

(T1) $\varnothing \in \tau$ va $X \in \tau$

(T2) $B_1, B_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$;

(T3) $N \subset \tau \cup N \in \tau$ kelib chiqadi degan shartlar bajarilsa, u holda τ oila X dagi topologiya, (X, τ) juftlik esa topologik fazo deyiladi.

(T1), (T2) va (T3) shartlar topologiya aksiomalari deyiladi.

Bunda "X to'plamda τ topologiya kiritilgan" yoki "τ oila X to'plamda topologiya hosil qiladi" yoki "τ oila X to'plamda topologiya tashkil etadi", yoki "τ oila X to'plamda topologiya bo'ladi" yoki "X to'plam τ topologiya bilan ta'minlangan" va shu kabilar ishlatiladi.

Tayinlangan τ topologiya bilan qaralayotgan (X, τ) topologik fazo uchun qisqalik maqsadida "X topologik fazo" (yana ham qisqaroq "X fazo") iborasi ishlatiladi.

1-misol. $X = \{0,1,2,3\}$ to'plamni qaraylik.

$\tau_{0X} = \{X, \{0\}\}$ oila topologiya aksiomalarini qanoatlantirmaydi.

Xuddi shuningdek,

$\tau_{1X} = \{X, \{1\}\}, \tau_{2X} = \{X, \{2\}\}$ va $\tau_{3X} = \{X, \{3\}\}$ oilalar ham X da topologiya bo'lishmaydi.

Bu oilalarning har birida $\varnothing$ kiritilsa, u holda ular X da topologiya aksiomalarini qanoatlantirishadi.

Demak,

$\tau'_{0X} = \{X, \{0\}, \varnothing\}, \tau'_{1X} = \{X, \{1\}, \varnothing\}, \tau'_{2X} = \{X, \{2\}, \varnothing, \tau'_{3X} = \{X, \{3\}, \varnothing\}$

oilalarning har biri X da topologiya tashkil etadi.

$\tau_{0\varnothing} = \{\varnothing, \{0\}\}$ oila X da topologiya hosil qilmaydi. Agar mazkur oilada X kiritilsa, u holda hosil bo‘lgan $\tau'_{0\varnothing} = \{X, \varnothing, \{0\}\}$ oila X da topologiya bo‘ladi.

$\tau_{01} = \{X, \varnothing, \{0\}, \{1\}\}$ oila X to‘plamda topologiya bo‘lmaydi. Bu oilada $\{0,1\}$ to‘plam kiritilsa, hosil bo‘lgan $\tau'_{01} = \{X, \varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$ oila X da topologiya bo‘ladi.

$\tau_{012} = \{X, \varnothing, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$ oila X to‘plamda topologiya emas. Mazkur oilada $\{1\}$ to‘plam kiritilsa, u holda

$\tau'_{012} = \{X, \varnothing, \{1\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

oila X da topologiya bo‘ladi.

Agar τ oila X to‘plamda topologiya hosil qilsa, u holda τ oilaning elementlari X fazoning nuqtalari deb ataladi.

2-misol. $X = \{0,1,2,3\}$ to‘plamda topologiya tashkil etuvchi, 1.1) misolda keltirilgan oilalar bilan ta’minlangan fazolardagi ochiq to‘plamlarni ko‘rsatamiz.

(X, τ'_{0X}) fazodagi ochiq to‘plamlar: $X, \{0\}$ va $\varnothing$. Xuddi shuningdek, $(X, \tau'_{1X}) : X, \{1\}, \varnothing; (X, \tau'_{2X}) : X, \{2\}, \varnothing; (X, \tau'_{2X}) : X, \{1\}, \varnothing$.

E’tibor berish lozimki, $\{0\}$ to‘plam (X, τ'_{0X}) da ochiq, lekin $(X, \tau'_{1X}), (X, \tau'_{2X})$ va (X, τ'_{3X}) larda ochiq emas.

Topshiriqlar. a) 1-misolning 2), 3) va 4) bandlaridagi topologik fazolarning ochiq to‘plamlarini ko‘rsating.

b) Aynan bitta to‘plamga turli xil topologiyalar kiritilganda har bir topologik fazolar hosil bo‘lishiga diqqat qiling. Bunda biror topologik fazoda ochiq bo‘lgan to‘plam boshqasiga ochiq bo‘lishi shart emasligini misollar orqali tushunib oling.

c) Topologiyaning ta’rif va 1-misoldan foydalanib, X va $\varnothing$ to‘plamlar (X,τ) ko‘rinishdagi har qanday topologik fazoda ochiq bo‘ilishini tushinib oling.

Bo‘sh bo‘lmagan X to‘plam va undagi ikkita τ_1 va τ_2 topologiyalarini qaraymiz. Agar (X,τ_1) dagi har bir A ochiq to‘plam (X,τ_2) da ochiq bo‘laversa, u holda τ_1 topologiya τ_2 topologiyadan kuchsizroq (yoki yirikroq) deyiladi va $\tau_1 \le \tau_2$ kabi yoziladi.

Agarda $\tau_1 \le \tau_2$ va $\tau_2 \le \tau_1$ munosabatlardan ikkalasi ham o‘rinli bo‘lsa, u holda $\tau_1 = \tau_2$ (ya’ni X da bu topologiyalar ustma-ust tushadi).

3-misol. Bo‘sh bo‘lmagan ixtiyoriy X to‘plam va uning undagi ikkita $\tau_\alpha = \{X,\varnothing\}$ va $\tau_d = \{A : A \subset X\}$ oilalarni qaraymiz. Ravshanki, τ_α oila ikkita elementdan iborat, τ_d oila esa X to‘plamning barcha to‘plamostilaridan tashkil topgan.

Topshiriq. Ikkita $\tau_\alpha = \{X,\varnothing\}$ va $\tau_d = \{A : A \subset X\}$ oila ham topologiya bo‘lishini isbotlang.

τ_a topologiya X dagi antidiskret topologiya, τ_d topologiya X dagi diskret topologiya, deyiladi. $\tau_a \le \tau_d$ ekanligi ko‘rinib turibdi.

Topshiriq. Har qanday τ topologiya uchun $\tau_a \le \tau$ va $\tau \le \tau_d$ bo‘lishini tushuntiring. Bunda bu topologiyalarning barchasi aynan bitta to‘plamda ajratilgan.

Agarda $\tau_1 \le \tau_2$ va $\tau_2 \le \tau_1$, munosabatlardan birortasi ham o‘rinli bo‘lmasa, u holda τ_1 va τ_2 lar taqqoslanmaydigan topologiyalar deyiladi.

Topshiriq. Biror to‘plam tanlab, unda taqqoslanmaydigan topologiyalar juftliklarini quring.

Topologiyaning ta’rifidan ochiq to‘plamlar quyidagi xossalarga egaligi kelib chiqadi:

(01) $\varnothing$ bo‘sh to‘plam va X to‘plam ochiq to‘plamlar bo‘ladi.

(02) Ochiq to‘plamlarning har qanday chekli oilasining kesishmasi ochiq to‘plam bo‘ladi.

(03) Ochiq to‘plamlarning ixtiyoriy oilasining birlashmasi ochiq to‘plam bo‘ladi.

(X,τ) topologik fazo va $G \subset X$ bo‘lsin. Agar $G \in \tau$ bo‘lsa, yuqorida bayon etilganlariga ko‘ra G to‘plam X da ochiq bo‘ladi. Agar $X \setminus G \in \tau$ bo‘lsa, u holda G to‘plam X da yopiq to‘plam deyiladi.

Yopiq to‘plamlar quyidagi xossalarga ega:

(C1) $\varnothing$ bo‘sh to‘plam va X to‘plam yopiq to‘plamlar bo‘ladi.

(C2) Yopiq to‘plamlarning har qanday oilasining kesishmasi yopiq to‘plam bo‘ladi.

(C3) Yopiq to‘plamlarning ixtiyoriy chekli oilasining birlashmasi yopiq to‘plam bo‘ladi.

Ochiq to‘plam tushunchasining ahamiyati juda katta. **Ahamiyat bering!** To‘plamda topologiya kiritish degani va shu to‘plamdagi (01) – (03) shartlarni qanoatlantiruvchi to‘plamlar oilasini qurish degan ma’noni anglatadi. Bular esa aynan bitta ma’noni bildiradi.

Yopiq to‘plamlarning ham ahamiyati ancha yuqori. Agarda biror to‘plamda topologiya kiritilgan bo‘lsa, u holda bu topologiyaning har bir elementining to‘ldirmasi yopiq to‘plam bo‘ladi. Aksincha, agarda biror to‘plamda (C1) – (C3) shartlarini qanoatlantiruvchi oila ajratilgan bo‘lsa, u holda uning to‘ldirmalaridan iborat oila berilgan to‘plamda topologiya bo‘ladi.

4-misol. $|X| \geq \aleph_0$ bo‘lsin. Bunda X to‘plamning quvvati $|X|$ orqali, natural sonlar to‘plamining quvvati $\aleph_0$ (o‘qilishi “alef-nol”) orqali belgilangan. Ushbu oilani ajratamiz: $\mathcal{C} = \{A \subset X : |A| < \aleph_0\} \cup \{X\}$.