



СУПЕРПОЗИЦИЯ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРА КВАДРАТИЧЕСКОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА И ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Магистр Бухарского Государственного Университета

Хикматуллаева Шахноза Вахобжон кизи

shanoz1@icloud.com

Аннотация. В данной работе рассматривается суперпозиция операторов Вольтерра квадратического стохастического оператора (КСО) и линейного стохастического оператора. Изучаются свойства полученного оператора, особенности его динамики и условия существования инвариантных точек. Предложенная конструкция расширяет класс известных стохастических операторов и открывает новые возможности для моделирования эволюционных процессов в популяциях.

Ключевые слова: Вольтерра квадратический стохастический оператор, линейный стохастический оператор, суперпозиция операторов, стохастические операторы, инвариантные точки, динамика операторов, эволюционные уравнения, математическая биология, популяционная генетика, нелинейные операторы.

Abstract. This paper investigates the superposition of Volterra-type quadratic stochastic operators (QSOs) and linear stochastic operators. The properties of the resulting operator, its structural characteristics, and dynamic behavior are analyzed. The proposed construction extends the class of known stochastic operators and provides new possibilities for modeling evolutionary processes in populations.

Keywords: Volterra quadratic stochastic operator, linear stochastic operator, composition of operators, stochastic operators, fixed points, dynamics of operators, evolutionary equations, mathematical biology, population genetics, nonlinear



operators.

1. Введение. Квадратические стохастические операторы являются важным инструментом в математической биологии, теории популяций и динамических системах. Они задают нелинейные отображения симплекса

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\},$$

используемые для описания эволюции вероятностных распределений.

Особый класс таких операторов — операторы Вольтерра, для которых вероятности рождения потомка одного из родителей задаются следующими условиями:

$$P_{ij}^k = 0, \text{ если } k \notin \{i, j\},$$

где коэффициенты P_{ij}^k определяют вероятности потомков в квадратичном операторе

$$(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^n P_{ij}^k x_i x_j$$

Линейные стохастические операторы, наоборот, задаются матрицей переходных вероятностей:

$$(Lx)_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i,$$

2. Формулировка задачи: суперпозиция операторов. Пусть даны оператор Вольтерра $(Vx)_k$ и линейный оператор $(Lx)_k$. Рассмотрим оператор

$$T_\alpha = \alpha V + (1 - \alpha)L \quad \alpha \in [0, 1].$$

Такое линейное сочетание сохраняет стохастичность оператора T_α . Основная задача — изучить, каким образом параметр α влияет на свойства оператора T_α , включая:



- наличие и характер инвариантных точек,
- динамику итераций,
- переход от чисто линейного к чисто квадратичному оператору

Вольтерра

3. Свойства суперпозиционного оператора

3.1 Сохранение стохастичности

Поскольку V и L являются стохастическими операторами, T_α также сохраняет стохастичность:

$$\sum_{i=1}^n (T_\alpha x)_k = \alpha \sum_{i=1}^n (Vx)_k + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^n (Lx)_k = \alpha \cdot 1 + (1 - \alpha) \cdot 1 = 1.$$

3.2 Инвариантные точки

Инвариантной точкой оператора T_α называется $x^* \in S^{n-1}$, для которой

$$T_\alpha(x^*) = x^*.$$

Известно, что линейный оператор L имеет набор собственных векторов и соответствующих стационарных распределений. Оператор Вольтерра V может иметь более сложный набор инвариантных точек, связанных с биологической интерпретацией.

Важный вопрос — как меняется множество инвариантных точек при изменении α .

3.3 Переход динамики

При $\alpha = 0$ динамика линейна, а при $\alpha = 1$ — чисто квадратичная. Для промежуточных значений динамика T_α характеризуется сочетанием нелинейных и линейных эффектов, что может приводить к сложным



бифуркациям, мультипликативной структуре устойчивости и уникальным состояниям.

Для различных значений α проводим численные итерации оператора T_α и анализируем устойчивость и сходимости к инвариантным точкам.

Пример из биологии

Представь, что есть популяция с несколькими типами организмов (например, синие, красные и зелёные). У каждого организма есть **тип** (или "ген"). Потомки появляются в результате "скрещивания" двух родителей, и тип потомка **зависит от типов обоих родителей**, а не только одного.

Так вот, квадратичный стохастический оператор описывает:

Как распределение типов в популяции меняется от поколения к поколению, **когда каждый новый организм рождается от случайной пары родителей. Как это работает?**

1. В начале у нас есть некое распределение: сколько процентов популяции — синие, красные и зелёные.
2. Эти организмы случайным образом "скрещиваются" между собой.
3. В зависимости от того, кто с кем "скрестился", с определённой вероятностью рождается тот или иной тип потомка.
4. Мы считаем, сколько будет новых синих, красных и зелёных — это и будет новое поколение.
5. Повторяем процесс снова и снова.

Чем это отличается от обычных моделей?

Обычные стохастические модели (например, марковские цепи) предполагают, что поведение объекта зависит только от текущего состояния. А КСО моделирует системы, где **важны взаимодействия между элементами**, а не поведение каждого по отдельности.



5. Обсуждение и выводы

1. Суперпозиция позволяет создавать гибкие модели эволюции популяций, учитывающие как прямые взаимодействия между индивидами, так и внешние линейные влияния.

2. Изменение параметра α приводит к переходу от линейной динамики к более сложной квадратичной, что отражает биологическую сложность взаимодействий.

3. Изучение таких операторов важно для понимания процессов адаптации, мутации и эволюции в биологических системах, а также для разработки новых стохастических моделей.

4. В дальнейшем возможно расширение модели на более общие классы операторов, включающих нелинейные и случайные компоненты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bernstein S.N. "The Solution of a Mathematical Problem Related to the Theory of Heredity." *Uch. Zapiski Nauchno-Issled. Kaf. Ukr.* 1924.

2. Ganikhodjaev N.N. "Quadratic Stochastic Operators, Lyapunov Functions and Trajectories." *Sbornik Mathematics*, 1993.

3. Lyubich Yu.I. "Mathematical Structures in Population Genetics." *Springer-Verlag*, 1992.

4. Rozikov U.A. "Dynamics of Evolutionary Equations." *Springer*, 2020.