



SHTURM-LIUUVILL MASALASI

Vahobjonova Madina Xomidjon qizi

FarDU, Matematika yo 'nalishi 3-bosqich talabasi

Yusubjonova Madinabonu Dilshod qizi

FarDU, Matematika yo 'nalishi 3- bosqich talabasi

Annotatsiya. Ushbu maqolada differensial tenglama uchun chegaraviy masala bayon qilingan va bu masala yechimi Grin funksiyalar usuli yordamida Fredgolm integral tenglamasiga keltirilgan.

Kalit so'zlar. Chegaraviy masala, Grin funksiya, Gilbert teoremasi.

Shturm–Liuvill masalalari matematik fizika, kvant mexanikasi, tebranishlar va to‘lqinlar nazariyasi kabi sohalarda uchraydigan fundamental masalalardan biridir. Ushbu masalalar ko‘pincha ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar va ularga qo‘yiladigan chegaraviy shartlar orqali ifodalanadi. Shturm–Liuvill operatorining spektral xususiyatlari – ya’ni o‘z qiymatlari va o‘z funksiyalari – tizimlarning tabiiy chastotalari va normal rejimlarini tahlil qilishda asosiy rol o‘ynaydi.

Maqsadimiz ushbu differensial tenglamani chegaraviy shartlarga asosan Grin funksiyasi yordamida izohlab, Fredgolm integral tenglamasiga keltiramiz. Grin funksiyasi yordamida chegaraviy masala yechimini integral ko‘rinishda ifodalash mumkin, bu esa nazariy tahlilni soddalashtirish bilan birga amaliy hisoblashlar uchun qulay vosita bo‘lib xizmat qiladi. Tadqiqot davomida Gilbert teoremasidan foydalanamiz.

Ushbu maqolada Shturm–Liuvill masalasini Grin funksiyasi usuli orqali yechishga qaratilgan izohli tahlil keltiriladi, bu esa o‘quvchilarga va tadqiqotchilarga mavzuni chuqurroq o‘zlashtirishda yordam beradi.



Bizga quyidagi masala berilgan bo'lsin.

$$L[y] = (p(x)y'(x))' + \lambda q(x)y(x) = 0$$

(1)

$$p(-1) = 0, \quad p(1) = 0 \quad (2)$$

Bu yerda $p(x) = p_0(x-1)^\alpha(x+1)^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$.

λ parametrning ma'lum qiymatlarida shunday $y(x)$ tenglama topilsinki u (1) tenglamani qanoatlantirsin va (2) shartlarni bajarsin, bu yerda $p(x)$ va $q(x)$ -berilgan malum funksiyalar. $p(x) > 0$, $q(x) > 0$, $x \in [-1,1]$ va λ -sonli parametr.

Odatda $\{(1),(2)\}$ masalani Shturm-Luivill masalasi yoki boshqacha Spektral masala deb ham ataladi. Avvalo $\{(1),(2)\}$ masala λ parametrning qanday qiymatlarida yechimga ega ekanligini tekshiramiz. Buning uchun (1) tenglamani

$$-(p(x)y'(x))' = \lambda q(x)y(x)$$

Ko'rinishda yozib olamiz va uning har ikki tomonini $y(x)$ ga ko'paytirib $x \in [-1,1]$ kesma bo'yicha integrallaymiz.

$$-\int_{-1}^1 [(p(x)y'(x))' y(x)] dx = \lambda \int_{-1}^1 q(x)y^2(x) dx \text{ bundan}$$

$$\int_{-1}^1 p(x)(y'(x))^2 dx = \lambda \int_{-1}^1 q(x)y^2(x) dx$$

(3)

hosil bo'ladi.

(3) tenglikdan ko'rinadiki $\lambda \geq 0$.

1. $\lambda = 0$ bo'lsin.

U holda (1) tenglama

$$-(p(x)y'(x))' = 0$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamaning umumiy yechimi



$$p(x)y'(x) = C_1, \quad y'(x) = \frac{C_1}{p(x)}, \quad y(x) = C_1 \int_{-1}^x \frac{dt}{p(t)} + C_2$$

ko'rinishda aniqlanadi. Bu umumiy yechimni (2) shartga bo'ysundirib

$$y(-1) = C_1 \int_{-1}^x \frac{dt}{p(t)} + C_2 = 0, \quad C_2 = 0$$

$$y(1) = C_1 \int_x^1 \frac{dt}{p(t)} = 0, \quad C_1 = 0$$

Bundan esa $\lambda = 0$ bo'lganda

$$y(x) = 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

Bundan xulosa qilamizki, $\{(1), (2)\}$ masala $\lambda > 0$ bo'lgandagina noldan farqli $y(x)$ funktsiya mavjud bo'ladi.

2. $\lambda > 0$ bo'lsin.

$$-(p(x)y'(x))' = \lambda q(x)y(x) = f(x)$$

(4)

tenglamani va (2) shartlarni qaraymiz.

$\{(4), (2)\}$ masala uchun Grin funksiyasini tuzamiz. Uni

$$G(x, s) = \begin{cases} A_1 \int_{-1}^x \frac{dt}{p(t)} + A_2, & -1 \leq x \leq s, \\ B_1 \int_x^1 \frac{dt}{p(t)} + B_2, & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(5)

ko'rinishida izlaymiz.

Chegaraviy shartlarga ko'ra $A_2 = 0, B_2 = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Buni hisobga olsak Grin funksiyasi



$$G(x, s) = \begin{cases} A_1 \int_{-1}^x \frac{dt}{p(t)}, & -1 \leq x \leq s, \\ B_1 \int_x^1 \frac{dt}{p(t)}, & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(6)

ko‘rinishga keladi. Grin funksiyasining uzluksizlik shartlarga asosan $x = s$ bo‘lganda

$$\begin{cases} A_1 \int_{-1}^s \frac{dt}{p(t)} = B_1 \int_s^1 \frac{dt}{p(t)} \\ \frac{B_1}{p(s)} + \frac{A_1}{p(s)} = \frac{-1}{p(s)} \end{cases}$$

algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz. Bu sistemani yechib, quyidagilarni topamiz.

$$A_1 = -\frac{\int_{-1}^1 \frac{dt}{p(t)}}{\int_{-1}^s \frac{dt}{p(t)}}, \quad B_1 = -\frac{\int_{-1}^s \frac{dt}{p(t)}}{\int_{-1}^1 \frac{dt}{p(t)}}.$$

Topganlarimizni (6) ga qo‘yib masalaning Grin funksiyasini quyidagi ko‘rinishda topamiz.

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{\int_{-1}^1 \frac{dt}{p(t)}}{\int_{-1}^s \frac{dt}{p(t)}} \int_{-1}^x \frac{dt}{p(t)}, & -1 \leq x \leq s, \\ -\frac{\int_{-1}^s \frac{dt}{p(t)}}{\int_{-1}^1 \frac{dt}{p(t)}} \int_x^1 \frac{dt}{p(t)}, & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Gilbert teoremasiga ko‘ra masalaning yechimi

$$y(x) = \lambda \int_{-1}^1 G(x, s) q(s) y(s) ds.$$

Bu tenglikni $\sqrt{q(x)}$ funksiyaga ko‘paytirib



$$\sqrt{q(x)}y(x) = \lambda \int_{-1}^1 \sqrt{q(x)q(s)}G(x,s)\sqrt{q(s)}y(s)ds$$

tenglikni hosil qilamiz.

$$z(x) = \sqrt{q(x)}y(x), K(x,s) = G(x,s)\sqrt{q(x)q(s)}$$

belgilashlarni kiritib

$$z(x) = \mu \int_{-1}^1 K(x,s)z(s)ds$$

(7) simmetrik yadroli Fredgolm integral tenglamasini hosil qilamiz.

Simmetrik yadroli integral tenglamalar nazariyasiga ko'ra simmetrik yadroli integral tenglamalar sanoqli sondagi o'sib boruvchi $0 < \mu_1 < \dots < \mu_n$ xos sonlarga ega va ularga mos $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$ xos funksiyalar mavjud. Bu xos funksiyalar sistemasi o'zaro ortonormal sistemani hosil qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Азизов М.С. О разрешимости нелокальной начально-граничной задачи для дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя // Scientific bulletin. Physical and Mathematical Research, 2022, №1, pp. 95-103.
2. Urinov A.K., Azizov M.S. On the solvability of an initial–boundary value problem for a high even order partial differential equation degenerating on the domain boundary // Journal of Applied and Industrial Mathematics.
3. Urinov A.K., Azizov M.S. Initial-Boundary Value Problem for a Degenerate High Even-Order Partial Differential Equation with the Bessel Operator // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 2, pp. 864–874.
4. Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. Тошкент: Мумтоз сўз. 2014.