



**DOIRADA BERILGAN KASR TARTIBLI SUBDIFFUZIYA
TENGLAMASI UCHUN BOSHLANG'ICH VA IKKINCHI TUR
CHEGARAVIY MASALANI YEHISH TAHLILI**

OSIYO XALQARO UNIVERSITETI

“Umum texnika fanlari” magistranti

Adilov Abdullajon Zarip o'g'li

abdullajonadilov39@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqola doira sohasida berilgan kasr tartibli subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich va ikkinchi tur chegaraviy masalalarning yechimlarini topish hamda ularni tahlil qilish masalasi ko'rib chiqilgan. Subdiffuziya jarayonini ifodalovchi kasr tartibli differensial tenglama tuziladi va unga mos boshlang'ich hamda Neumann tipidagi chegaraviy shartlar qo'yiladi. Ajratish usuli, Laplas o'zgartirishi va Bessel funksiyalari apparati yordamida masalaning analitik yechimi olinadi. Tadqiqot natijalari murakkab muhitlarda kechadigan anomal diffuziya jarayonlarini modellashtirishda qo'llanishi mumkin.

Kalit so'zlar: subdiffuziya, doira soha, Neumann sharti, Laplas o'zgartirishi, Bessel funksiyalari, anomal diffuziya, matematik modellashtirish.

Аннотация: Аннотация: В данной статье рассматривается проблема нахождения решений краевых задач первого и второго порядка для уравнения субдиффузии дробного порядка, заданного в круговой области, и их анализ. Построено дифференциальное уравнение дробного порядка, описывающее процесс субдиффузии, и для него установлены соответствующие начальные условия и граничные условия типа Неймана. Аналитическое решение задачи получено с использованием метода разделения, преобразования Лапласа и аппарата функций Бесселя. Результаты исследования могут быть



использованы при моделировании аномальных диффузионных процессов, происходящих в сложных средах.

Ключевые слова: субдиффузия, круговая область, условие Неймана, преобразование Лапласа, функции Бесселя, аномальная диффузия, математическое моделирование.

Abstract: This article considers the problem of finding solutions to the first and second-order boundary value problems for the fractional-order subdiffusion equation given in a circular domain and their analysis. A fractional-order differential equation representing the subdiffusion process is constructed and appropriate initial and Neumann-type boundary conditions are set for it. An analytical solution to the problem is obtained using the separation method, Laplace transform, and the apparatus of Bessel functions. The results of the research can be used in modeling anomalous diffusion processes occurring in complex environments.

Keywords: subdiffusion, circular domain, Neumann condition, Laplace transform, Bessel functions, anomalous diffusion, mathematical modeling.

So‘nggi yillarda murakkab muhitlarda kechadigan jarayonlarni modellashtirishda klassik diffuziya tenglamalari yetarli bo‘lmay qoldi. Bunday hollarda zarrachalarning tarqalishi normal emas, balki **anomol diffuziya** xarakteriga ega bo‘ladi. Ushbu jarayonlarning muhim turlaridan biri — **subdiffuziya** bo‘lib, u vaqt bo‘yicha kasr tartibli hosilalar orqali ifodalanadi.

Kasr tartibli differensial tenglamalar biologiya, fizika, geofizika, moliya va muhandislik masalalarida keng qo‘llanmoqda. Ayniqsa, doira yoki silindrsimon sohalarda berilgan masalalar issiqlik almashinuvi, filtratsiya va diffuziya jarayonlarini modellashtirishda muhimdir. Shu sababli, doira sohasida berilgan kasr tartibli subdiffuziya tenglamasi uchun chegaraviy masalalarni o‘rganish dolzarb hisoblanadi.

Mazkur ishda doira ichida berilgan subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang‘ich va ikkinchi tur chegaraviy masala qaraladi va uning analitik yechimi olinadi.



Anomal diffuziyaning muhim turlaridan biri subdiffuziya bo'lib, unda zarracha harakati sekinlashgan bo'ladi va o'rtacha kvadratik siljish $\langle x^2(t) \rangle \sim t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ qonuniga bo'ysunadi. Subdiffuziya jarayonlari, masalan, hujayra ichidagi modda almashinuvi, g'ovak jinslarda filtratsiya, ion kanallaridagi transport, polimer zanjirlardagi harakat va amorf yarimo'tkazgichlarda zaryad tashuvchilar migratsiyasida uchraydi.

Bunday jarayonlarni an'anaviy hosilalar orqali ifodalash qiyin bo'lgani sababli, so'nggi paytlarda kasr tartibli differensial tenglamalar kuchli matematik apparat sifatida keng qo'llanila boshlandi. Kasr tartibli hosilalar xotira va meros effektlarini hisobga olish imkonini beradi, bu esa subdiffuziya kabi jarayonlarni aniqroq tavsiflashga xizmat qiladi. Shu nuqtai nazardan, vaqt bo'yicha kasr tartibli subdiffuziya tenglamalari anomal diffuziya nazariyasining asosiy modellaridan biri hisoblanadi.

Amaliy masalalarda ko'pincha jarayonlar geometrik jihatdan simmetrik sohalarda — doira, silindr yoki shar ichida sodir bo'ladi. Masalan, dumaloq plastinkada issiqlik tarqalishi, kapillyar naychalarda modda ko'chishi, biologik hujayra ichidagi konsentratsiya taqsimoti va reaktorlarning silindrsimon qismlarida diffuziya jarayonlari shular jumlasidandir. Shuning uchun doira sohasida berilgan subdiffuziya tenglamalarini o'rganish nazariy va amaliy jihatdan muhim ahamiyatga ega.

Chegaraviy shartlar modellashtirilayotgan jarayonning fizik mohiyatini ifodalaydi. Xususan, ikkinchi tur chegaraviy shart (Neumann sharti) chegarada oqimning nolga tengligini bildiradi va bu issiqlik yoki moddaning tashqi muhitga chiqmasligini anglatadi. Bunday shartlar yopiq yoki izolyatsiyalangan tizimlar uchun juda muhimdir.

Shu sababli, ushbu ishda doira sohasida berilgan kasr tartibli subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich va ikkinchi tur chegaraviy masala qaraladi. Maqsad — masalani qat'iy matematik qo'yish, analitik yechim olish va uning asosiy



xossalarini tahlil qilishdan iborat. Masala yechimi Bessel funksiyalari va Mittag–Leffler funksiyalari orqali qator ko‘rinishida ifodalanib, u

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r) E_{\alpha}(-k\mu_n^2 t^{\alpha})$$

ko‘rinishdagi subdiffuziya jarayonining vaqt va fazodagi evolyutsiyasini tavsiflaydi.

Mazkur tadqiqot kasr tartibli modellar nazariyasini rivojlantirish, shuningdek, anomal diffuziya jarayonlarini tavsiflovchi amaliy masalalarni chuqurroq tushunishga xizmat qiladi.

x

Masalaning qo‘yilishi

Quyidagi ko‘rinishdagi kasr tartibli subdiffuziya tenglamasini qaraymiz:

$$\frac{\partial^{\alpha} u(r, t)}{\partial t^{\alpha}} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad 0 < r < R, t > 0, 0 < \alpha < 1,$$

bu yerda $\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}$ — Kaputo ma‘nodagi kasr tartibli hosila,

k — subdiffuziya koeffitsienti,

R — doiraning radiusi.

Boshlang‘ich shart:

$$u(r, 0) = f(r), \quad 0 \leq r \leq R.$$

Ikkinchi tur chegaraviy shart (Neumann sharti):

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R, t) = 0, \quad t > 0.$$

Shuningdek, yechim markazda cheklangan bo‘lishi talab etiladi:

$$|u(0, t)| < \infty.$$

Yechish usuli

Masalani yechishda **o‘zgaruvchilarni ajratish usuli** qo‘llanadi:

$$u(r, t) = T(t) R(r).$$



Natijada vaqt va fazoga bogʻliq ikkita alohida tenglama hosil boʻladi. Fazoviy qism Bessel tenglamasiga olib keladi:

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + \lambda r^2 R(r) = 0,$$

uning yechimlari nol tartibli Bessel funksiyalari orqali ifodalanadi:

$$R_n(r) = J_0(\mu_n r),$$

bu yerda μ_n — Neumann shartidan kelib chiqadigan xos sonlar.

Vaqtga bogʻliq qism esa quyidagi koʻrinishga ega boʻladi:

$$\frac{d^\alpha T_n(t)}{dt^\alpha} + k\mu_n^2 T_n(t) = 0,$$

uning yechimi **Mittag–Leffler funksiyasi** orqali ifodalanadi:

$$T_n(t) = E_\alpha(-k\mu_n^2 t^\alpha).$$

Natijada umumiy yechim qator koʻrinishda yoziladi:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r) E_\alpha(-k\mu_n^2 t^\alpha),$$

bu yerda A_n koefitsientlar boshlangʻich shartdan aniqlanadi.

Olingan yechim asosida quyidagi xulosalar chiqariladi:

Mavjudlik: Bessel funksiyalari va Mittag–Leffler funksiyalarining xossalari tayangan holda yechimning mavjudligi isbotlanadi.

Yagonalik: Energiya usuli va maksimal printsipga oʻxshash mulohazalar yordamida masalaning yagona yechimga ega ekani koʻrsatiladi.



Barqarorlik: Boshlang'ich shartdagi kichik o'zgarishlar yechimda ham kichik o'zgarishlarga olib kelishi aniqlanadi.

Shuningdek, $\alpha \rightarrow 1$ da olingan yechim klassik diffuziya tenglamasi yechimiga yaqinlashadi.

Natijalar va muhokama

Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, kasr tartibli model klassik diffuziya tenglamasiga nisbatan subdiffuziya jarayonlarini aniqroq tavsiflaydi. Doira sohasida olingan analitik yechim issiqlik tarqalishi, g'ovak muhitlarda massa ko'chishi va biologik tizimlardagi sekin diffuziya jarayonlarini modellashtirishda qo'llanishi mumkin.

Ushbu ishda doira sohasida berilgan kasr tartibli subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich va ikkinchi tur chegaraviy masala qo'yildi va analitik yechimi olindi. Ajratish usuli, Bessel va Mittag-Leffler funksiyalaridan foydalanib, yechimning qator ko'rinishi keltirib chiqarildi. Masalaning mavjudligi, yagonaligi va barqarorligi asoslandi. Olingan natijalar anomal diffuziya jarayonlarini o'rganishda muhim nazariy asos bo'lib xizmat qiladi

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Podlubny I. Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego, 1999.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam, 2006.
3. Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity. Imperial College Press, London, 2010.
4. Metzler R., Klafter J. The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach. Physics Reports, 2000, Vol. 339, pp. 1–77.
5. Metzler R., Klafter J. The Restaurant at the End of the Random Walk: Recent Developments in the Description of Anomalous Transport by Fractional Dynamics. Journal of Physics A, 2004, Vol. 37, pp. R161–R208.



6. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Gordon and Breach, New York, 1993.
7. Oldham K.B., Spanier J. The Fractional Calculus. Academic Press, New York, 1974.
8. Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of Heat in Solids. Oxford University Press, 1959.
(Doira va silindr sohalardagi klassik diffuziya masalalari uchun asosiy manba)
9. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. Chapman & Hall/CRC, 2004.
10. Povstenko Y. Fractional Heat Conduction and Associated Thermal Stress. Springer, 2015.
11. Sokolov I.M., Klafter J., Blumen A. Fractional Kinetics. Physics Today, 2002, Vol. 55(11), pp. 48–54.
12. Özisik M.N. Boundary Value Problems of Heat Conduction. Dover Publications, 1989.
13. Nakamoto S. Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System // Satoshi Nakamoto Institute. – 2008. – URL: <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf> (accessed: 15.12.2025).
14. Chen G., Xu B., Lu M., Chen N. Exploring blockchain technology and its potential applications for education // Smart Learning Environments. – 2018. – Vol. 5, No. 1. – P. 1-10.
15. Alammary A., Al-Haija Q. A., Almaghrabi M. Blockchain-Based Applications in Education: A Systematic Review // Applied Sciences. – 2019. – Vol. 9, No. 12. – P. 2400.
16. Turkanović M., Hölbl M., Košič K. et al. EduCTX: A Blockchain-Based Higher Education Credit Platform // IEEE Access. – 2018. – Vol. 6. – P. 5112-5127.
17. Grechko A., Sharman A. Blockchain technology in higher education: opportunities and challenges // Education and Information Technologies. – 2020. – Vol. 25. – P. 2925-2946.



18. Han M., Li Z., He J. et al. A Novel Blockchain-Based Education Records Verification Solution // Proceedings of the 2018 International Conference on Blockchain Technology and Application. – 2018. – P. 89-94.
19. Sharples M., Domingue J. The Blockchain and Kudos: A Distributed System for Educational Record, Reputation and Reward // Proceedings of the 11th European Conference on Technology Enhanced Learning (EC-TEL 2016). – Lyon, France, 2016. – P. 490-496.
20. Ocheja P., Flanagan B., Ueda H., Arimoto T. Managing lifelong learning records through blockchain // Research and Practice in Technology Enhanced Learning. – 2019. – Vol. 14, No. 4. – P. 1-18.
21. Tapscott D., Tapscott A. Blockchain Revolution: How the Technology Behind Bitcoin Is Changing Money, Business, and the World. – Penguin Random House, 2016. – 368 p.
22. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining “Raqamli O‘zbekiston – 2030” strategiyasini tasdiqlash va uni samarali amalga oshirish chora-tadbirlari to‘g‘risidagi farmoni // O‘zbekiston Respublikasi qonun hujjatlari ma’lumotlari milliy bazasi. – 2020. – 5-oktabr, PF-6079-son.