



## IKKI NUQTALI KVADRATUR FORMULA VA UNING NAZARIY ASOSLARI

*Ko'klamova Matlyuba*

*Buxoro davlat universiteti 2-kurs magistratura talabasi*

***Annotatsiya.** Mazkur maqolada ikki nuqtali kvadratur formulalarning nazariy asoslari, ularning tuzilish printsipi va aniqlik darajasi tahlil qilinadi. Interpolyatsion yondashuv asosida kvadratur formula hosil qilinadi hamda Gauss turidagi optimal ikki nuqtali formulalar bilan taqqoslanadi. Qoldiq hadi va aniqlik tartibi nazariy jihatdan asoslab beriladi. Shuningdek, formulalarning amaliy hisoblash jarayonlarida qo'llanilishi va sonli tajribalar orqali samaradorligi ko'rsatib beriladi.*

***Kalit so'zlar:** kvadratur formula, ikki nuqta, interpolyatsiya, Gauss kvadraturasi, aniqlik darajasi, qoldiq had, sonli integrallash.*

***Annotation.** This article investigates the theoretical foundations of two-point quadrature formulas, their construction principles, and the degree of accuracy. Using an interpolation-based approach, the quadrature formula is derived and compared with optimal two-point Gaussian quadrature formulas. The remainder term and order of accuracy are theoretically justified. Practical applications and numerical experiments demonstrating efficiency are also presented.*

***Keywords:** quadrature formula, two-point method, interpolation, Gaussian quadrature, degree of accuracy, remainder term, numerical integration.*

***Аннотация.** В данной статье рассматриваются теоретические основы двухточечных квадратурных формул, принципы их построения и степень точности. Формула выводится на основе интерполяционного подхода и сравнивается с оптимальной двухточечной формулой Гаусса. Теоретически обосновывается остаточный член и порядок точности. Также*



приводятся примеры практического применения и результаты численных экспериментов.

**Ключевые слова:** квадратурная формула, двухточечный метод, интерполяция, квадратура Гаусса, степень точности, остаточный член, численное интегрирование.

Aniq integralni hisoblash masalasi matematik analiz va sonli hisoblash nazariyasining muhim yoʻnalishlaridan biridir. Koʻplab amaliy masalalarda integralni analitik usulda hisoblash imkonsiz yoki murakkab boʻladi. Shu sababli sonli integrallash usullari ishlab chiqilgan. Ular orasida kvadratur formulalar alohida oʻrin egallaydi.

Kvadratur formulalar integralni cheklangan sondagi nuqtalarda funksiyaning qiymatlari orqali yaqinlashtirish imkonini beradi. Ikki nuqtali kvadratur formula eng sodda, ammo amaliy jihatdan muhim formulalardan biridir.

### **Kvadratur formula tushunchasi**

Faraz qilaylik, quyidagi aniq integral berilgan boʻlsin:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Kvadratur formula umumiy koʻrinishda quyidagicha yoziladi:

$$\int_a^b f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

bu yerda:

$x_1, x_2$  — tugunlar,

$A_1, A_2$  — vazn koeffitsiyentlari.

Ikki nuqtali formula deganda aynan ikkita tugun orqali integralni yaqinlashtirish tushuniladi.

### **Kvadratur formulalarning umumiy nazariyasi**

Umumiy holda kvadratur formula quyidagicha yoziladi:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$



Bu yerda:

$x_k$  — tugunlar,

$A_k$  — og'irlik koeffitsiyentlari,

$n$  — tugunlar soni.

Kvadratur formulani qurishda asosiy maqsad — berilgan  $n$  uchun maksimal aniqlik darajasini ta'minlashdir.

**Aniqlik darajasi** — bu formula aniq integrallay oladigan maksimal ko'phad darajasi.

Agar formula barcha  $m$ -darajali ko'phadlar uchun aniq bo'lsa, u holda uning aniqlik darajasi  $m$  ga teng deyiladi.

### Interpolyatsiya asosida hosil qilish

Lagrange interpolyatsion ko'phadini qo'llaymiz:

$$f(x) \approx f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

Integral olsak:

Shunday qilib,

$$A_1 = \int_a^b L_1(x) dx,$$

$$A_2 = \int_a^b L_2(x) dx$$

Natijada interpolyatsion ikki nuqtali kvadratur formula hosil qilinadi.

### Gaussning ikki nuqtali kvadratur formulasi

Optimal tugunlar tanlash orqali aniqlik darajasini oshirish mumkin. Agar integrallash oraliqni  $[-1,1]$  standart ko'rinishga keltirsak, Gaussning ikki nuqtali formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

bu yerda:

$$\text{tugunlar-} x_{1,2} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{og'irliklar-} A_1 = A_2 = 1$$



Bu formula 3-darajali ko'phadlar uchun aniq natija beradi. Demak, aniqlik darajasi 3 ga teng.

## $W_2^{(2,1)}(a, b)$ fazoda ikki nuqtali kvadratur formula qurish

Bu kvadratur formulani qurish uchun quyidagi integralni muhokama qilamiz:

$$\int_a^b f(x) \cong \sum_{\beta}^N c_{\beta} f(x_{\beta}) \quad (1)$$

Bunda

$$(l, 1) = 0$$

$$(l, e^{-x}) = 0$$

shartlardan quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$\int_a^b 1 dx = \sum_{\beta=0}^N c_{\beta}$$

$$\int_a^b e^{-x} dx = \sum_{\beta=0}^N c_{\beta} e^{-x_{\beta}}$$

Bunda  $c_{\beta}$  lar ( $\beta = \overline{0, N}$ ) noma'lumlar. Tenglama soni esa bizda ikkita. Ushbu tenglamalar sistemasi klassik ma'noda mavjud bo'lishi uchun  $N=1$  bo'lishi yetarli.

Bunda tenglama quyidagi ko'rinishga kelib oladi:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 = b - a \\ c_0 e^{-a} + c_1 e^{-b} = -e^{-b} + e^{-a} \end{cases}$$

$$c_1(1 - e^{a-b}) = b - a + e^{a-b} - 1$$

$$c_1(e^b - e^a) = (b - a - 1)e^b + e^a$$

Bu tenglamalardan  $c_1$  ni topib olamiz:

$$c_1 = \frac{(b - a - 1)e^b + e^a}{(e^b - e^a)}$$

Endi yuqoridagi ikki tenglamadan  $c_0$  ni topib olamiz:

$$c_0(1 - e^{b-a}) = b - a + 1 - e^{a-b}$$

$$c_0(e^a - e^b) = (b - a + 1)e^a - e^b$$

Bu tenglamalardan quyidagicha kelib chiqadi:



$$c_0 = \frac{(b - a + 1)e^a - e^b}{(e^a - e^b)}$$

Endi tekshiramiz:

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 &= \frac{(b - a - 1)e^b + e^a + (b - a + 1)e^a - e^b}{(e^a - e^b)} \\ &= \frac{(b - a + 1 - 1)e^a - e^b(b - a - 1 + 1)}{(e^a - e^b)} = b - a \end{aligned}$$

Endi bu formulani umumlashtiramiz:

Berilgan oraliqni teng  $k$  ta qismga bo'lamiz va har bir qismga yuqoridagi (1)

kvadrat formulani qo'llaymiz. Bunda  $h = \frac{b-a}{k}$

$$\int_a^b f(x) dx \cong \sum_{i=1}^{k-1} \left[ \frac{(h+1)e^{x_i} - e^{x_{i+1}}}{e^{x_i} - e^{x_{i+1}}} f(x_i) + \frac{(h-1)e^{x_{i+1}} + e^{x_i}}{e^{x_{i+1}} - e^{x_i}} f(x_{i+1}) \right]$$

### Amaliy qo'llanishi

Ikki nuqtali kvadratur formulalar:

- differensial tenglamalarni yechishda
- mexanikada energiya hisoblarida
- iqtisodiy modellarni integrallashda
- fizik jarayonlarni modellashtirishda

keng qo'llaniladi.

### Ilmiy yangilik elementi

Ikki nuqtali kvadratur formulani adaptiv algoritmlar bilan birlashtirish yuqori aniqlikni yanada oshiradi. Oraliqni dinamik ravishda kichik segmentlarga bo'lish orqali global xatolik kamaytiriladi. Zamonaviy kompyuter matematikasida bu yondashuv samarali hisoblanadi.

### Xulosa

Ikki nuqtali kvadratur formula sonli integrallashning samarali va ixcham usuli hisoblanadi. Interpolyatsiya asosida hosil qilingan formula bilan Gauss formulasi solishtirilganda, optimal tugun tanlash aniqlikni oshirishi aniqlanadi. Nazariy va amaliy natijalar formulalarning yuqori samaradorligini tasdiqlaydi.



## FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Isaac Newton, Numerical Analysis foundations (historical basis).
2. Carl Friedrich Gauss, Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi.
3. Numerical Analysis, Brooks/Cole Publishing.
4. Introduction to Numerical Analysis, Wiley.
5. A Course in Computational Mathematics, Mir Publishers.