



MAXSUS INTEGRALNI TAQRIBIY HISOBLASH

Musayev Abdumannon

Dotsent O'zbekiston Milliy universiteti Jizzax Filiali

Barotova Sevinch Ilhom qizi

Magistr O'zbekiston Milliy universiteti Jizzax Filiali

ANNOTATSIYA: Ushbu maqolada Koshi yadroli singulyar integralni Bernshteyn ko'phadi yordamida taqribiy hisoblash usuli ko'rib chiqilgan. Singulyar integral $\int_0^1 \frac{f(x)}{x-t} dx, t \in (0,1)$ shaklida berilgan bo'lib, $x = t$ nuqtasida uzilish mavjud. Misol sifatida $f(x) = x^2 + 2$ funksiya olinib $[0,1]$ oraliqda besh bo'lakka bo'linadi va har bir nuqtadagi qiymatlar asosida Bernshteyn polinomi quriladi. Nyuton binom formulasidan foydalanib integral yig'indisiga ajratiladi va alohida hisoblanadi. Taqribiy natija $\frac{5}{6}$ ga teng bo'lib, Koshi bosh qiymati bilan yaxshi mos keladi. Ushbu yondashuv singulyar integrallarni amaliy va ishonchli hisoblash imkonini beradi.

Kalit

so'zlar: Singulyar integral, Bernshteyn ko'phadi, Nuyuton binom formulasi.

Quyidagi integralni qaraymiz:

$$S(t) = \int_0^1 \frac{f(x)}{x-t} dx, t \in (0,1). \quad (1)$$

Agar $x = t$ bo'lsa integral ostidagi funksiya uzilishga ega, shuning uchun, odatda bu integral singulyar integral deyiladi. Ma'lumki, t nuqta integrallashning chetki nuqtalariga teng bo'lmaganda (1) integral mavjud [1]. (1) singulyar integralni taqribiy hisoblashni quyidagi misol orqali ko'rsatamiz.

Misol. Soddalik uchun, $f(x) = x^2 + 2$ va $t = \frac{1}{2}$ deb tanlab olib, quyidagi



$$\int_0^1 \frac{x^2 + 2}{x - \frac{1}{2}} dx$$

singulyar integralni Bernshteyin ko'phadi yordamida taqribiy hisoblang.

Yechish. Bu yerda $f(x) = x^2 + 2$ funksiya $[0,1]$ oraliqda uzluksiz. Shuning uchun bu funktsiyani Bernshteyin ko'phadiga almashtirish mumkin. $[0,1]$ oraliqdagi

$$0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$$

nuqtalar yordamida besh bo'lakka bo'lamiz va bu nuqtalardagi $x^2 + 2$ funktsiyaning qiymatlarini hisoblaymiz

$$f(0) = 2, f\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2 = \frac{51}{25}, f\left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 2 = \frac{54}{25},$$

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 2 = \frac{59}{25}, f\left(\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 2 = \frac{66}{25}, f(1) = (1)^2 + 2 = 3.$$

Bu qiymatlar yordamida Bernshteyin ko'phadini tuzamiz:

$$\sum_{k=0}^5 f\left(\frac{k}{5}\right) C_5^k x^k (1-x)^{5-k} =$$

$$= f(0)C_5^0 x^0 (1-x)^{5-0} + f(1)C_5^1 x^1 (1-x)^{5-1} + f(2)C_5^2 x^2 (1-x)^{5-2} +$$

$$+ f(3)C_5^3 x^3 (1-x)^{5-3} + f(4)C_5^4 x^4 (1-x)^{5-4} + f(5)C_5^5 x^5 (1-x)^{5-5} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1-x)^5 + \frac{51}{25} \cdot \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot x(1-x)^4 + \frac{54}{25} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot x^2(1-x)^3 +$$

$$+ \frac{59}{25} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot x^3(1-x)^2 + \frac{66}{25} \cdot \frac{5!}{1! \cdot 4!} \cdot x^4(1-x)^1 + 3 \cdot 1 \cdot x^5(1-x)^0 =$$

$$= 2(1-x)^5 + \frac{51}{5} x(1-x)^4 + \frac{108}{5} x^2(1-x)^3 + \frac{118}{5} x^3(1-x)^2 +$$

$$+ \frac{66}{5} x^4(1-x) + 3x^5.$$

Shunday qilib, $[0,1]$ oraliqda

$$f(x) = x^2 + 2 \approx 2(1-x)^5 + \frac{51}{5} x(1-x)^4 +$$



$$+ \frac{108}{5} x^2(1-x)^3 + \frac{118}{5} x^3(1-x)^2 + \frac{66}{5} x^4(1-x) + 3x^5.$$

Yuqorida isbot qilngan teoremaga asosan quyidagi taqribiy formulani yozib olamiz:

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 2}{x - \frac{1}{2}} dx \approx$$

$$\approx \int_0^1 \frac{2(1-x)^5 + \frac{51}{5} x(1-x)^4 + \frac{108}{5} x^2(1-x)^3 + \frac{118}{5} x^3(1-x)^2 + \frac{66}{5} x^4(1-x) + 3x^5}{x - \frac{1}{2}} dx$$

$$=$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{(1-x)^5}{x - \frac{1}{2}} dx + \frac{51}{5} \int_0^1 \frac{x(1-x)^4}{x - \frac{1}{2}} dx + \frac{108}{5} \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^3}{x - \frac{1}{2}} dx +$$

$$+ \frac{108}{5} \int_0^1 \frac{x^3(1-x)^2}{x - \frac{1}{2}} dx + \frac{66}{5} \int_0^1 \frac{x^4(1-x)}{x - \frac{1}{2}} dx + 3 \int_0^1 \frac{x^5}{x - \frac{1}{2}} dx.$$

Endi taqribiy tenglikning o'ng tomonidagi parametr ga bog'liq bo'lgan integrallarni alohida-alohida hisoblash uchun

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Niyuton-binom formulasidan foydalanamiz.

$$(1-x)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k 1^k x^{5-k} = C_5^0 1^0 x^{5-0} + C_5^1 1^1 x^{5-1} + C_5^2 1^2 x^{5-2} + C_5^3 1^3 x^{5-3} +$$

$$+ C_5^4 1^4 x^{5-4} + C_5^5 1^5 x^{5-5} = -x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1.$$

$$(1-x)^4 = \sum_{k=0}^4 C_4^k 1^k x^{4-k} = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x + 1,$$

$$(1-x)^3 = \sum_{k=0}^3 C_3^k 1^k x^{4-k} = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1, (1-x)^2 = x^2 - 2x + 1.$$

Unda



$$\int_0^1 \frac{(1-x)^5}{x-\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 \frac{-x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1}{x-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= -\int_0^1 \frac{x^5 dx}{x-\frac{1}{2}} + 5\int_0^1 \frac{x^4 dx}{x-\frac{1}{2}} - 10\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x-\frac{1}{2}} + 10\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x-\frac{1}{2}} - 5\int_0^1 \frac{x dx}{x-\frac{1}{2}} + \int_0^1 \frac{dx}{x-\frac{1}{2}}$$

Агар

$$\int_0^1 \frac{x^k dx}{x-t} = \int_0^1 (x^{k-1} + tx^{k-2} + t^2x^{k-3} + \dots + t^{k-3}x + t^{k-2}) dx + t^{k-1} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x-t}$$

$$= \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}t + \frac{1}{k-2}t^2 + \dots + \frac{1}{2}t^{k-3} + t^{k-2} \right) + t^{k-1} \cdot I(t)$$

formuladan foydalansak, u holda

$$\int_0^1 \frac{x^5 dx}{x-\frac{1}{2}} = \int_0^1 \left(x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 x + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right) dx + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \int_0^1 \frac{dx}{x-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right) + \left(\frac{1}{2}\right)^5 I\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{15} + \frac{1}{32} I\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{8}{15} + \frac{1}{32} \ln|1-2| = \frac{8}{15} + \frac{1}{32} \ln|-1| = \frac{8}{15};$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 dx}{x-\frac{1}{2}} = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right) dx + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \int_0^1 \frac{dx}{x-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right) + \left(\frac{1}{2}\right)^4 I(t) = \frac{2}{3};$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 I(t) = \frac{5}{6};$$

Bularni e'tiborga olsak, u holda

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^5}{x-\frac{1}{2}} dx = - \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right) + \left(\frac{1}{2}\right)^5 I\left(\frac{1}{2}\right) \right] +$$



$$\begin{aligned}
 &+5 \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^3 \right) + \left(\frac{1}{2} \right)^4 I(t) \right] - 10 \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}t + t^2 \right) + \left(\frac{1}{2} \right)^3 I(t) \right] \\
 &+ \\
 &+10 \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \right)^2 I \left(\frac{1}{2} \right) \right] - 5 \left[1 + \frac{1}{2} I \left(\frac{1}{2} \right) \right] + I \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{8}{15} + \frac{1}{32} \ln|-1| + \\
 &+5 \cdot \frac{2}{3} - 10 \cdot \frac{5}{6} + 10 - 5 = \frac{5}{6}.
 \end{aligned}$$

Shunday qilib,

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 2}{x - \frac{1}{2}} dx \approx \frac{5}{6}.$$

Bu maxsus integral koshining bosh qiymati ma'nosida mavjud bo'lganligi uchun, uni quyidagicha hisoblash mumkin:

$$\begin{aligned}
 v.p. \int_0^1 \frac{x^2 + 2}{x - \frac{1}{2}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \frac{x^2 + 2}{x - \frac{1}{2}} dx + \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \frac{x^2 + 2}{x - \frac{1}{2}} dx \right) = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{x - \frac{1}{2}} \right) dx + \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{x - \frac{1}{2}} \right) dx \right] = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + 3 \ln \left| x - \frac{1}{2} \right| \right)_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + 3 \ln \left| x - \frac{1}{2} \right| \right)_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \right] = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right)^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) + 3 \ln \left| \frac{1}{2} - \varepsilon - \frac{1}{2} \right| - 3 \ln \left| -\frac{1}{2} \right| \right\} + \\
 &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3 \ln \left| \frac{1}{2} \right| - \frac{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right)^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) - 3 \ln \left| \frac{1}{2} + \varepsilon - \frac{1}{2} \right| \right\} = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} + 3 \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon} + 3 \ln \left| \frac{1}{2} \right| + 1 - \frac{\varepsilon}{2} - 3 \ln \left| \frac{1}{2} \right| \right\} = 1.
 \end{aligned}$$



FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Мухелишвили Н.И., Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», М.,1966.
2. Гахов Ф.Д., Краевые задачи, «Наука»,М.,1977.
3. Кудрявцев Л.Д., Курс математического анализа, т.1; Москва, Наука, 1981.
4. Мамедханов Дж.И., Салаев В.В., Локальные свойства особых интегралов. ДАН Азерб,ССР, матем., 1984, 90, 8, 15-15 стр.
5. Мусаев А.О. Оценки для особого интеграла в локальных характеристиках, Тезисы докладов IV Республиканской научной конференции аспирантов ВУЗов Азербайджана(г.Боку 20-21 октября 1981г),Боку, изд.АГУ им. С.М.Кирова,1981, с.59.
6. Musayev A.O., Локальная полиномиальная аппроксимация на квазиконформных кривых. Тезисы докладов международной конференции по теории приближения функций (г. Киев, 30 мая-6 июня, 1983 года), Киев, 1983,с.131
7. Musayev A.O., O`zaro qo`shma funksiyalarning lokal modul uzliksizligi va ko`phadlar bilan yaqinlashish orasidagi o`zgarishlar. Xalq xo`jaligi tarmoqlari va jamiyatni islohot davrida rivojlantirish muommalari. Toshkent,1998 ,№3,64-65 b.
8. Мусаев А.О. некоторых вопросах локализованной аппроксимации в комплексной плоскости., канд.диссю. г.Баку, 1987 г.
9. Musayev A.O. Локал узлуксизлик модули ва унинг баъзи хоссалари. Сборник научных трудов Республиканской научно – технической конференции. “Проблемы внедрения инновационных, проектов и технологий в производство” 15-16 мая 2009 г. Джизак ,2009 г. 244-246 с.
10. Мусаев А.О., Ўзаро қўшма функцияларнинг локал модуль узлуксизлиги ва кўпхадлар билан яқинлашиш орасидаги мунособатлар. Халқ хўжалиги тармоқлари ва жамиятни ислохат даврида ривожлантириш муоммалари Тошкент,1998 ,№3,64-65 б