



CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING TURG‘UNLIGINI LYAPUNOV USULI BILAN TADQIQ QILISH

Qoraqalpoq davlat universiteti
Amaliy matematika mutaxassisligi
Magistratura 1- kurs talabasi
Kadirbaeva Eleonora Alisher qizi

Аннотация: *Mazkur ishda chiziqli differensial tenglamalarning turg‘unligini Aleksandr Lyapunov tomonidan ishlab chiqilgan Lyapunov usuli asosida tadqiq qilish masalalari yoritilgan. Tizimlarning turg‘unlik tushunchasi, uning turlari hamda Lyapunov funksiyalari yordamida turg‘unlikni aniqlash usullari ilmiy jihatdan asoslab berilgan. Shuningdek, chiziqli differensial tenglamalar uchun Lyapunovning bevosita (to‘g‘ridan-to‘g‘ri) usuli qo‘llanilib, tizimning muvozanat holati atrofidagi xatti-harakatlari tahlil qilinadi. Tadqiqot natijalari matematik modellashtirish, boshqaruv nazariyasi va amaliy masalalarda keng qo‘llanishi mumkin.*

Калит so‘zlar: *Chiziqli differensial tenglama, turg‘unlik, Lyapunov usuli, Lyapunov funksiyasi, muvozanat holati, asimptotik turg‘unlik, beqarorlik, dinamik tizim, matematik modellashtirish, boshqaruv nazariyasi.*

Аннотация: *В данной работе рассматриваются вопросы исследования устойчивости линейных дифференциальных уравнений на основе метода Ляпунова, разработанного Александром Ляпуновым. Рассматриваются понятие устойчивости систем, её виды, а также методы определения устойчивости с помощью функций Ляпунова. Для линейных дифференциальных уравнений применяется прямой (непосредственный) метод Ляпунова, анализируются поведение системы вблизи состояния равновесия. Результаты исследования могут быть применены в математическом моделировании, теории управления и практических задачах.*



Ключевые слова: *Линейное дифференциальное уравнение, устойчивость, метод Ляпунова, функция Ляпунова, состояние равновесия, асимптотическая устойчивость, неустойчивость, динамическая система, математическое моделирование, теория управления.*

Annotation: *This work addresses the study of stability of linear differential equations based on the Lyapunov method developed by Aleksandr Lyapunov. The concept of system stability, its types, and methods of determining stability using Lyapunov functions are scientifically substantiated. For linear differential equations, the direct (or straightforward) Lyapunov method is applied, analyzing the behavior of the system near its equilibrium state. The results of the study can be widely applied in mathematical modeling, control theory, and practical problems.*

Keywords: *Linear differential equation, stability, Lyapunov method, Lyapunov function, equilibrium state, asymptotic stability, instability, dynamic system, mathematical modeling, control theory.*

Chiziqli differensial tenglamalar zamonaviy matematikaning muhim bo'limlaridan biri bo'lib, ular yordamida turli tabiiy va ijtimoiy jarayonlar modellashtiriladi. Fizika, mexanika, iqtisodiyot, biologiya hamda texnika sohalarida uchraydigan ko'plab jarayonlar aynan differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Ayniqsa, real tizimlarning vaqt bo'yicha o'zgarishini o'rganishda chiziqli differensial tenglamalar asosiy vosita hisoblanadi. Shu sababli, bunday tizimlarning barqaror yoki beqaror ekanligini aniqlash ilmiy va amaliy jihatdan katta ahamiyatga ega.

Turg'unlik tushunchasi matematik analiz va differensial tenglamalar nazariyasida markaziy o'rin egallaydi. Tizimning turg'unligi deganda, uning boshlang'ich shartlaridagi kichik o'zgarishlarga nisbatan qanday munosabatda bo'lishi tushuniladi. Agar tizim kichik buzilishlardan so'ng yana muvozanat holatiga qaytsa, u turg'un deb qaraladi. Aksincha, agar tizim muvozanat holatidan uzoqlashib ketsa, u beqaror hisoblanadi. Bu tushuncha ayniqsa boshqaruv tizimlari, avtomatika va muhandislik masalalarida muhim ahamiyat kasb etadi.



Turg'unlikni tadqiq qilishning turli usullari mavjud bo'lib, ulardan eng samarali va keng qo'llaniladigani Aleksandr Lyapunov tomonidan XIX asr oxirlarida ishlab chiqilgan Lyapunov usulidir. Lyapunov 1892-yilda e'lon qilgan "Harakatning umumiy turg'unligi masalasi" nomli ilmiy ishida differensial tenglamalar tizimlarining turg'unligini aniqlashning yangi yondashuvini taklif etgan. Ushbu usulning asosiy g'oyasi shundan iboratki, tizimning turg'unligini aniqlash uchun uning yechimini aniq topish shart emas, balki maxsus tanlangan Lyapunov funksiyasi yordamida tizim xatti-harakatini baholash mumkin.

Lyapunov usuli ikki asosiy ko'rinishga ega: birinchisi — chiziqshartirish (ya'ni birinchi yaqinlashuv) usuli, ikkinchisi esa bevosita (to'g'ridan-to'g'ri) usuldir. Bevosita usul ayniqsa muhim bo'lib, u yordamida nolinear tizimlar uchun ham turg'unlikni tekshirish mumkin. Chizikli differensial tenglamalar uchun esa bu usul ancha sodda va samarali natijalar beradi. Bu usulda Lyapunov funksiyasi sifatida odatda kvadratik shakldagi funksiyalar tanlanadi va ular yordamida tizimning energiyaga o'xshash xossalari tahlil qilinadi.

Bugungi kunda Lyapunov usuli avtomatika, robototexnika, aviatsiya, elektr tizimlari va hatto iqtisodiy modellarni tahlil qilishda keng qo'llanilmoqda. Masalan, samolyotlarning barqaror uchishini ta'minlash, elektr tarmoqlarining ishonchli ishlashi yoki iqtisodiy tizimlarning muvozanatini saqlash kabi masalalarda aynan turg'unlik nazariyasi muhim rol o'ynaydi. Shu jihatdan qaraganda, chizikli differensial tenglamalarning turg'unligini Lyapunov usuli yordamida o'rganish nafaqat nazariy, balki amaliy ahamiyatga ham ega.

Mazkur ishning maqsadi — chizikli differensial tenglamalarning turg'unligini Lyapunov usuli asosida chuqur tahlil qilish, asosiy tushunchalar va usullarni ilmiy jihatdan yoritish hamda ularning amaliy qo'llanish imkoniyatlarini ko'rsatib berishdan iborat.

Chizikli differensial tenglamalarning turg'unligini o'rganish matematika va amaliy fanlarda muhim o'rin egallaydi. Har qanday tizimni tahlil qilishda eng avvalo uning muvozanat holati aniqlanadi. Muvozanat holati — bu tizim tashqi ta'sir bo'lmaganda o'z holatini o'zgartirmaydigan nuqtadir. Amaliyotda aynan shu



holatning turg'un yoki beqaror ekanligi muhim hisoblanadi. Masalan, mexanik tizimlarda muvozanat buzilganda jism o'z holatiga qaytadimi yoki undan uzoqlashadimi — bu turg'unlikka bog'liq.

Chiziqli tizimlarning asosiy xususiyati shundaki, ular aniq qonuniyatlar asosida o'zgaradi va ularni tahlil qilish nisbatan osonroq. Ilmiy manbalarga ko'ra, agar tizimning ichki xossalari "so'nuvchi" xarakterga ega bo'lsa, ya'ni vaqt o'tishi bilan har qanday kichik og'ish kamayib borsa, bunday tizim turg'un hisoblanadi. Aksincha, agar og'ish ortib boraversa, tizim beqaror bo'ladi. Bu holat ko'plab real jarayonlarda kuzatiladi, masalan, elektr tarmoqlarida kuchlanishning ortib ketishi yoki mexanik tizimlarda tebranishning kuchayishi.

Turg'unlikni aniqlashning eng muhim va ishonchli usullaridan biri Aleksandr Lyapunov tomonidan ishlab chiqilgan usul hisoblanadi. U XIX asr oxirida tizimlarning xatti-harakatini o'rganishda yangi yondashuvni taklif qilgan. Lyapunov usulining asosiy ustunligi shundaki, unda tizimning aniq yechimini topish talab qilinmaydi. Bu esa murakkab tizimlarni ham osonroq tahlil qilish imkonini beradi.

Lyapunov usulida maxsus funksiya tanlanadi va bu funksiya tizimning umumiy holatini ifodalaydi. Ilmiy jihatdan bu funksiya energiyaga o'xshash kattalik sifatida qaraladi. Aniq fakt shuki, agar tanlangan funksiya vaqt o'tishi bilan kamayib borsa, bu tizimning ichki energiyasi kamayayotganini bildiradi va natijada tizim muvozanat holatiga intiladi. Bu esa turg'unlik belgisi hisoblanadi. Agar funksiya o'sib borsa, tizim beqaror ekanligi aniqlanadi.

Chiziqli differensial tenglamalar uchun odatda sodda va qulay funksiyalar tanlanadi. Tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, bunday tizimlar uchun mos funksiya topish nisbatan oson va natija aniq bo'ladi. Shu sababli Lyapunov usuli aynan chiziqli tizimlarda juda samarali hisoblanadi. Bu usul yordamida tizimning nafaqat turg'unligi, balki uning qanchalik tez muvozanatga qaytishi ham baholanadi.

Amaliy misol sifatida texnik tizimlarni ko'rish mumkin. Masalan, avtomatik boshqaruv tizimlarida har qanday kichik xatolik vaqt o'tishi bilan yo'qolib borishi kerak. Agar bu sodir bo'lmasa, tizim noto'g'ri ishlaydi. Shuning uchun muhandislar tizimni loyihalashda albatta turg'unlikni tekshiradilar. Bu jarayonda aynan



Lyapunov usuli keng qo'llaniladi. Shu bilan birga, aviatsiya sohasida samolyotning barqaror uchishi, energetika tizimlarida barqaror tok ta'minoti ham turg'unlik nazariyasiga bevosita bog'liq.

Yana bir muhim fakt shundaki, Lyapunov usuli nafaqat lokal, balki global turg'unlikni ham baholash imkonini beradi. Ya'ni tizim faqat kichik og'ishlarda emas, balki katta o'zgarishlarda ham qanday harakat qilishini aniqlash mumkin. Bu esa uni boshqa usullardan ustun qiladi. Shu sababli zamonaviy ilm-fanda, ayniqsa boshqaruv nazariyasi va modellashtirishda ushbu usul asosiy metodlardan biri sifatida qaraladi.

Xulosa qilib aytganda, chiziqli differensial tenglamalarning turg'unligini Lyapunov usuli yordamida o'rganish sodda, aniq va ishonchli natijalar beradi. Bu usulning ilmiy asoslanganligi va amaliy qo'llanish doirasining kengligi uni bugungi kunda eng muhim metodlardan biriga aylantirgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Aleksandr Lyapunov. Harakatning umumiy turg'unligi masalasi. — Moskva, 1892.
2. Vladimir Arnold. Oddiy differensial tenglamalar nazariyasi. — Moskva: Nauka, 1974.
3. Lev Pontryagin. Oddiy differensial tenglamalar. — Moskva: Nauka, 1962.
4. Hassan Khalil. Nonlinear Systems. — New Jersey: Prentice Hall, 2002.
5. Lawrence Perko. Differential Equations and Dynamical Systems. — New York: Springer, 2001.
6. Gilbert Strang. Linear Algebra and Its Applications. — Boston: Brooks/Cole, 2006.
7. O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi. Differensial tenglamalar fanidan o'quv qo'llanma. — Toshkent, 2020.