



**BROUWERNING FIKS NUQTA TEOREMASI VA UNING
QO'LLANILISHLARI**

Saliyeva Sevara Ma'mirbek qizi,

Andijon davlat pedagogika instituti

“Matematika va Informatika” kafedrası o'qituvchisi E-mail:

saliyevasevara18@gmail.com

Sherqoziyeva Holidaxon Muhsinjon qizi

Andijon davlat pedagogika instituti

Matematika yo'nalishi 2-bosqich talabasi,

E-mail: holidaxonsherqoziyeva@gmail.com

***Annotatsiya.** Mazkur maqolada Brouwerning fiks nuqta teoremasi topologik nuqtai nazardan o'rganiladi. Teoremaning bayoni, asosiy shartlari va retraksiyaga asoslangan isbot g'oyasi batafsil bayon etiladi. Birinchi qismda topologik fazo, kompaktlik va uzluksiz akslantirish tushunchalari keltiriladi. Ikkinchi qismda Brouwer teoremasi isboti algebraik topologiya elementlari yordamida tushuntiriladi. Uchinchi qismda teoremaning uchta muhim qo'llanilishi — Peano teoremasi, Arrov–Debre umumiy iqtisodiy muvozanat teoremasi va Nash muvozanati — tahlil qilinadi. Olingan natijalar matematikaning nazariy va amaliy yo'nalishlari o'rtasidagi chuqur aloqani ko'rsatadi.*

***Kalit so'zlar:** topologik fazo, kompakt to'plam, uzluksiz akslantirish, fiks nuqta, Brouwer teoremasi, retraksiya, Peano teoremasi, Nash muvozanati, iqtisodiy muvozanat.*

***Аннотация.** В данной статье теорема Брауэра о неподвижной точке исследуется с топологической точки зрения. Подробно излагаются формулировка теоремы, основные условия и идея доказательства, основанная на ретракции. В первой части приводятся понятия топологического пространства, компактности и непрерывного отображения. Во второй части доказательство теоремы Брауэра объясняется с помощью элементов*



алгебраической топологии. В третьей части анализируются три важных применения теоремы: теорема Пеано, теорема Эрроу — Дебрё об общем экономическом равновесии и равновесие Нэша. Полученные результаты демонстрируют глубокую связь между теоретическими и прикладными направлениями математики.

Ключевые слова: топологическое пространство, компактное множество, непрерывное отображение, неподвижная точка, теорема Брауэра, ретракция, теорема Пеано, равновесие Нэша, экономическое равновесие.

Abstract. This article examines Brouwer's fixed-point theorem from a topological perspective. The statement of the theorem, its fundamental conditions, and the proof idea based on retraction are described in detail. The first part introduces the concepts of topological space, compactness, and continuous mapping. In the second part, the proof of Brouwer's theorem is explained using elements of algebraic topology. The third part analyzes three significant applications of the theorem: Peano's theorem, the Arrow–Debreu general economic equilibrium theorem, and the Nash equilibrium. The results obtained demonstrate a profound connection between the theoretical and practical branches of mathematics.

Keywords: topological space, compact set, continuous mapping, fixed point, Brouwer's theorem, retraction, Peano's theorem, Nash equilibrium, economic equilibrium.

KIRISH

Topologiya — matematikaning shunday bo'limiki, unda fazolarning sifatli xossalari, xususan, ularning uzluksizlik va yaqinlik xususiyatlari masofa tushunchasiga tayanmasdan o'rganiladi. Uning eng muhim natijalaridan biri — gollandiyalik matematik Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966) tomonidan 1910-yilda isbotlangan fiksl nuqta teoremasidir. Ushbu teoremaga ko'ra, n-o'lchamli Evklid fazosidagi yopiq va chegaralangan diskni o'ziga uzluksiz akslantirishda kamida bitta nuqta o'z o'rnini saqlab qoladi.



Fiks nuqta nazariyasi XX asrning birinchi yarmida matematik analysis va topologiyaning rivojlanishi bilan birgalikda shakllandi. 1922-yilda Stefan Banax siqiluvchi akslantirishlar uchun fiks nuqta teoremasini isbotladi; 1930-yilda Juliusz Shauder uni cheksiz o'lchamli Banax fazolariga umumlashtirdi; 1941-yilda Shizuo Kakutani ko'p qiymatli akslantirishlar uchun analogini topdi. Brouwer teoremasining ahamiyati shundaki, u faqat uzluksizlik shartida — siqiluvchilik yoki boshqa metrik shartlarsiz — fiks nuqta mavjudligini kafolatlaydi.

Brouwer teoremasining qo'llanilish doirasi juda keng. Differensial tenglamalar yechimlarining mavjudligini (Peano teoremasi), iqtisodiy muvozanat modellarini (Arrov–Debre, 1954) va o'yinlar nazariyasidagi Nash muvozanatini (Nash, 1950) isbotlashda ushbu teorema markaziy o'rin egallaydi. Jon Nash (1994) va Jerar Debre (1983) ning iqtisod bo'yicha Nobel mukofotlariga sazovor bo'lgan ishlari bevosita Brouwer teoremasiga tayanadi.

Maqolaning maqsadi — Brouwerning fiks nuqta teoremasini topologik asoslar bilan birga bayon etish, isbot g'oyasini algebraik topologiya elementlari yordamida tushuntirish va turli sohalardagi qo'llanilishlarini ko'rsatishdan iborat.

Tadqiqot usullari: matematik nazariy tahlil, taqqoslash, umumlashtirish hamda klassik adabiyotlarni o'rganish.

I. ASOSIY TUSHUNCHALAR

Brouwer teoremasini bayon qilish uchun zarur bo'lgan bir necha asosiy tushunchani keltiramiz.

Ta'rif 1 (*Topologik fazo*). X — bo'sh bo'lmagan to'plam va τ — uning qism to'plamlari oilasi bo'lsin. Agar (1) $\emptyset, X \in \tau$; (2) τ oilasiga tegishli ixtiyoriy sondagi to'plamlarning birlashmasi τ ga tegishli; (3) τ oilasiga tegishli chekli sondagi to'plamlarning kesishmasi τ ga tegishli bo'lsa, (X, τ) *topologik fazo* deyiladi. τ ga tegishli to'plamlar ochiq to'plamlar deb ataladi.

Evklid fazosi \mathbb{R}^n topologik fazoning asosiy namunasi bo'lib, ochiq sharlar $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$ bazis vazifasini bajaradi. Brouwer teoremasida markaziy obyekt — n -o'lchamli yopiq birlik diski va uning chegarasi:



$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}, \quad S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

Geyne–Borel teoremasiga ko'ra, \mathbb{R}^n da to'plam kompakt bo'lishi uchun zarur va yetarli shart — uning yopiq va chegaralangan bo'lishidir. Demak, D^n — kompakt to'plam.

Ta'rif 2 (*Uzluksiz akslantirish*). $f : X \rightarrow Y$ akslantirish *uzluksiz* deyiladi, agar Y dagi har qanday ochiq $U \subset Y$ to'plam uchun

$$f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}$$

da ochiq bo'lsa.

Bu ta'rif analizdagi $\varepsilon - \delta$ ta'rifini umumlashtiradi va masofaga tayanmaydi. Uzluksiz akslantirishlar kompakt to'plamlarni kompakt to'plamlarga o'tkazadi va bog'liq to'plamlarning bog'liqligini saqlaydi.

Ta'rif 3 (*Retraksiya*). X topologik fazo va $A \subset X$ bo'lsin. $r : X \rightarrow A$ uzluksiz akslantirish *retraksiya* deyiladi, agar har bir $x \in A$ uchun $r(x) = x$ tenglik bajarilsa. Boshqacha aytganda, A ning nuqtalari retraksiya ta'sirida o'z o'rnida qoladi.

Ta'rif 4 (*Fiks nuqta*). $f : X \rightarrow X$ akslantirishning *fiks nuqtasi* — bu shunday $x^* \in X$ nuqtaki, $f(x^*) = x^*$ tenglik bajariladi. Akslantirishning barcha fiks nuqtalari to'plami $\text{Fix}(f)$ bilan belgilanadi:

$$\text{Fix}(f) = \{x \in X : f(x) = x\}.$$

Geometrik nuqtai nazardan, $y = f(x)$ funksiya uchun fiks nuqta — bu funksiya grafigining $y = x$ bisektrisasi bilan kesishish nuqtasidir. Masalan, $f(x) = x^2$ funksiyaning $\text{Fix}(f) = \{0, 1\}$, $f(x) = \cos x$ funksiyaning esa yagona fiks nuqtasi $x \approx 0.739$ (Daubney soni) hisoblanadi.

II. BROUWERNING FIKS NUQTA TEOREMASI

2.1-teorema (*Brouwer, 1910*). Agar $f : D^n \rightarrow D^n$ uzluksiz akslantirish bo'lsa, u holda kamida bitta $x^* \in D^n$ nuqta mavjud bo'lib, $f(x^*) = x^*$ tenglik o'rinli bo'ladi.



Teoremaning uchta sharti muhim ahamiyatga ega: (1) soha kompakt (yopiq va chegaralangan) bo'lishi; (2) akslantirish sohani o'ziga akslantirishi; (3) akslantirish uzluksiz bo'lishi. Bu shartlardan birini olib tashlash teoremani buzadi.

Misol 1. $f : (0,1) \rightarrow (0,1), f(x) = x/2$ akslantirishida $x = 0$ yagona fiks nuqta bo'lar edi, ammo $0 \notin (0,1)$. Shu'ning uchun ochiq sohada fiks nuqta yo'q. Bu yopiqlik shartining zarurligini ko'rsatadi.

Misol 2. $f : D^2 \rightarrow D^2, f(x,y) = (x/2, y/2)$ akslantirishini qaraylik. $Fix(f) = \{(0,0)\}$ — koordinata boshi yagona fiks nuqta. Bu fiks nuqtaning yagonaligiga misol; ammo umumiy holda Brouwer teoremasi yagonalikni kafolatlamaydi.

Isbot g'oyasi. Teskaridan faraz qilaylik: f fiks nuqtaga ega bo'lmasin, ya'ni har bir $x \in D^n$ uchun $f(x) \neq x$. U holda x va $f(x)$ — turli ikki nuqta. Har bir x uchun $f(x)$ dan x tomonga nur o'tkazib, uning S^{n-1} bilan kesishish nuqtasini $r(x)$ deb belgilaymiz:

$$r : D^n \rightarrow S^{n-1}, r(x) = \text{nur} \cap S^{n-1}.$$

f va arifmetik amallarning uzluksizligidan r ham uzluksiz. $x \in S^{n-1}$ bo'lsa, $r(x) = x$. Demak, r — D^n dan S^{n-1} ga uzluksiz retraksiya.

Lekin algebraik topologiyaning markaziy natijasiga ko'ra, bunday retraksiya mavjud emas. $n = 2$ holatda buning isboti quyidagicha: $\pi_1(D^2) = \{1\}$ (trivial guruh, chunki disk soddagiy bog'liq), $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ (butun sonlar guruhi). Retraksiya r dan kelib chiqadigan gomomorfizm $r_* : \pi_1(D^2) \rightarrow \pi_1(S^1)$ va kiritish $i : S^1 \rightarrow D^2$ dan kelib chiqadigan i^* birgalikda $(r \circ i)_* = id_{\mathbb{Z}}$ tenglikni talab qiladi. Ammo bu $\{1\}$ guruh orqali o'tadi va imkonsiz. $n \geq 3$ holatda gomologiya guruhlari $H_{n-1}(D^n) = 0, H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$ farqi xuddi shunday zidlikka olib keladi. Demak, boshlang'ich faraz noto'g'ri va f fiks nuqtaga ega.

Teorema fiks nuqtaning mavjudligini kafolatlaydi, lekin uning yagonaligi yoki konstruktiv ravishda topilishi haqida hech narsa demaydi. Bu uni Banach teoremasidan ajratuvchi asosiy xususiyatdir: Banach teoremasida siqiluvchi



akslantirish yagona fiks nuqtaga ega va uni $x_{n+1} = f(x_n)$ iteratsiyasi bilan topish mumkin.

III. TEOREMANING QO'LLANILISHLARI

3.1. Differensial tenglamalar nazariyasida.

Koshi masalasini ko'rib chiqamiz:

$$dx/dt = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

bu yerda $f(t, x)$ — uzluksiz funksiya. Ikkala tomonni integrallasak, ekvivalent integral tenglamani olamiz:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds = (Tx)(t).$$

Demak, masalani yechish T operatorning fiks nuqtasini topishga ekvivalent. Arzelya–Askoli teoremasiga ko'ra T to'liq uzluksiz operator bo'lib, kompakt to'plamni o'ziga akslantiradi. Brouwerning cheksiz o'lchamli umumlashmasi — Shauder teoremasi — T ning fiks nuqtasini, ya'ni masalaning yechimini kafolatlaydi.

2.1.1-teorema (Peano, 1886). Agar $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uzluksiz va chegaralangan funksiya bo'lsa, Koshi masalasi $[a, b]$ kesmada kamida bitta yechimga ega. Yagonalik uchun Lipshtits sharti talab qilinadi; aks holda masalada bir nechta yechim bo'lishi mumkin.

Masalan, $dx/dt = \sqrt{x}, x(0) = 0$ masalasida ikkita yechim mavjud: $x_1(t) = 0$ va $x_2(t) = t^2/4$. Bu fiks nuqta teoremasining yagonalik haqida hech narsa bermasligini tasdiqlaydi.

3.2. Iqtisodiy muvozanat masalalarida.

Arrov va Debre (1954) umumiy iqtisodiy muvozanat mavjudligini quyidagicha isbotladi. Iqtisodiyotda n turdagi mahsulot mavjud bo'lib, narxlar vektori narx simpleksida joylashsin:

$$p = (p_1, \dots, p_n) \in \Delta = \{ p \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0, \sum p_i = 1 \}.$$

Har bir p uchun ortiqcha talab funksiyasi $Z(p) = (Z_1(p), \dots, Z_n(p))$ aniqlanadi. Walras qonuniga ko'ra $\sum p_i Z_i(p) = 0$. Muvozanat narxi p^* — bu $Z(p^*) \leq 0$ shartni qanoatlantiruvchi narx. Quyidagi akslantirishni quramiz:



$$\varphi_i(p) = (p_i + \max(0, Z_i(p))) / (1 + \sum_j \max(0, Z_j(p))).$$

$\varphi : \Delta \rightarrow \Delta$ uzluksiz va Δ kompakt-konveks to'plam. Brouwer teoremasiga ko'ra φ ning fiks nuqtasi p^* mavjud. Walras qonunidan p^* muvozanat narxi ekanligi kelib chiqadi. Mazkur natija Jerar Debrega 1983-yilda Nobel mukofotini olib keldi.

3.3. Nash muvozanati.

n o'yinchili o'yinda har bir i-o'yinchining aralash strategiyalar to'plami Δ_i kompakt-konveks simpleks hisoblanadi. $\Delta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$ — kompakt-konveks to'plam.

2.3.1-ta'rif (Nash muvozanati). $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ strategiyalar profili Nash muvozanati deyiladi, agar har bir i o'yinchi va uning har qanday $\sigma_i \in \Delta_i$ strategiyasi uchun $u_i(\sigma^*) \geq u_i(\sigma_1^*, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n^*)$ bajarilsa. Ya'ni, hech bir o'yinchi yolg'iz o'z strategiyasini o'zgartirib foydasini oshira olmaydi.

2.3.1-teorema (Nash, 1950). Har qanday cheklangan o'yinda aralash strategiyalarda kamida bitta Nash muvozanati mavjud.

Isbot g'oyasi. Har bir $\sigma \in \Delta$ uchun i-o'yinchining eng yaxshi javob to'plami $BR_i(\sigma) = \arg \max u_i(\sigma_1, \dots, \sigma_i', \dots, \sigma_n)$. $BR(\sigma) = \prod BR_i(\sigma)$ ko'p qiymatli akslantirish bo'lib, yopiq grafik va konveks qiymatlar xossalarini qanoatlantiradi. Brouwerning ko'p qiymatli umumlashmasi — Kakutani teoremasi — BR ning fiks nuqtasi $\sigma^* \in BR(\sigma^*)$ mavjudligini kafolatlaydi. Bu fiks nuqta Nash muvozanatidir.

Nash teoremasining ahamiyati shundaki, u nafaqat iqtisodiyotda, balki siyosatshunoslik, evolyutsion biologiya, kompyuter ilmlari va sun'iy intellekt sohalarida ham keng qo'llaniladi. Jon Nash shu natija uchun 1994-yilda Nobel mukofotiga sazovor bo'ldi.

XULOSA

Mazkur maqolada Brouwerning fiks nuqta teoremasi topologik nuqtai nazardan o'rganildi. Olib borilgan tahlil asosida quyidagi xulosalar shakllandi.



Birinchidan, Brouwer teoremasi sof matematik shaklda ifodalangan bo'lsa-da, uning isboti algebraik topologiyaning chuqur vositalariga — fundamental guruhlar va gomologiya nazariyasiga — tayanadi. Teoremaning markazida D^n diskdan S^{n-1} sferasiga uzluksiz retraksiya mavjud emasligi fakti turadi.

Ikkinchidan, teoremaning uchta sharti — kompaktlik, uzluksizlik va sohani o'ziga akslantirish — har biri muhim va zarurdir. Bu shartlardan birini olib tashlash teoremani buzadi.

Uchinchidan, Brouwer teoremasi mavjudlik haqidagi natija bo'lib, fiks nuqtaning yagonaligi yoki konstruktiv topilishi haqida hech narsa bermaydi. Bu uni Banax teoremasidan farqlaydi.

To'rtinchidan, teoremaning qo'llanilish doirasi juda keng: differensial tenglamalar yechimlarining mavjudligi (Peano teoremasi), iqtisodiy muvozanat (Arrov–Debre) va o'yinlar nazariyasi (Nash muvozanati) — barchasi Brouwer teoremasiga asoslanadi.

Kelajakdagi tadqiqotlar uchun Shauder, Kakutani teoremalari va ularning nohiziqiy analizdagi qo'llanilishlarini o'rganish istiqbolli yo'nalish hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Yunusov A.S. Topologiya asoslari. — Toshkent: TDPU nashriyoti, 2012. — 184 b.
2. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K. Funktsional analizning tanlangan boblari. — Toshkent: Fan, 2014. — 208 b.
3. Imomqulov S.A. Differensial tenglamalar. — Toshkent: Iqtisod-moliya, 2015. — 312 b.
4. Sharipov O'.O', Ergashboyev T.J. Iqtisodiy-matematik usullar va modellar. — Toshkent: TDIU nashriyoti, 2016. — 264 b.
5. Toshmatov Sh.M. Topologik fazolar nazariyasiga kirish. — Toshkent: Universitet, 2018. — 168 b.
6. Munkres J.R. Topology. Second Edition. — Prentice Hall, 2000. — 537 p.
7. Hatcher A. Algebraic Topology. — Cambridge University Press, 2002. — 544 p.



8. Granas A., Dugundji J. Fixed Point Theory. — Springer, 2003. — 690 p.
9. Border K.C. Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory. — Cambridge University Press, 2001. — 144 p.
10. Nash J. Non-Cooperative Games // Annals of Mathematics. — 1951. — Vol. 54. — P. 286–295.
11. Arrow K.J., Debreu G. Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy // Econometrica. — 1954. — Vol. 22. — P. 265–290.