



BENFORD QONUNI: RAQAMLAR DUNYOSIDAGI YASHIRIN TARTIB VA UNING QO'LLANILISHI

Xurramov Yodgor^{1,2}

*¹Toshkent irrigatsiya va qishloq xo'jaligini mexanizatsiyalash muhandislari
instituti" milliy tadqiqotlar universiteti*

²Tashkent Perfect university

yxurramov94@mail.ru

Annotatsiya: *Ushbu maqolada Benford qonuni — ko'plab real hayotdagi ma'lumotlar to'plamlarida birinchi raqam taqsimotini tasvirlovchi logarifmik qonun — atroflicha tahlil qilinadi. Maqolada qonunning matematikaviy asosi, tarixiy kashfiyoti, stokastik va deterministik jarayonlardagi namoyon bo'lishi hamda moliya, soliq nazorati va raqamli kriminalistika kabi amaliy sohalardagi qo'llanilishi ko'rib chiqiladi. Arno Berger va Teodor Hill (2017) tomonidan nashr etilgan «Benford qonuni nima?» asari asosida tuzilgan mazkur tadqiqot qonunning universalligi va uning hali hal etilmagan muammolari haqida to'liq ma'lumot beradi.*

Kalit so'zlar: *Benford qonuni, birinchi raqam qonuni, logarifmik taqsimot, significand, moliyaviy firibgarlik, stokastik jarayonlar, deterministik ketma-ketliklar.*

1. KIRISH

Ko'pgina kishilar raqamlarning birinchi xonasi 1 dan 9 gacha teng ehtimollik bilan — har biri taxminan 11,1% da — uchraydi deb o'ylaydi. Ammo tabiat, iqtisodiyot va texnologiya dunyosida to'plangan ma'lumotlar buning mutlaqo aksini ko'rsatadi. Mamlakat aholisi, soliq deklaratsiyasidagi raqamlar, Internetdagi sonlar, astronomik ma'lumotlar — bularning barchasida 1 raqami birinchi o'rinda 9 raqamiga qaraganda olti baravargacha ko'proq uchraydi.

Bu g'aroyib hodisa Benford qonuni deb ataladi. Qonun ko'plab ma'lumotlar to'plamlarida sonlarning birinchi (va keyingi) raqamlarining aniq logarifmik taqsimotga bo'ysunishini ta'riflaydi. Ushbu qonun nafaqat nazariy matematik



jihatdan qiziqarli, balki amaliy jihatdan ham nihoyatda foydali — jumladan, moliyaviy hisobotlardagi soxta raqamlarni aniqlashda keng qo'llaniladi.

Maqolaning maqsadi: Benford qonunining mohiyatini, matematikaviy asosini, turli jarayonlardagi ko'rinishlarini va zamonaviy qo'llanilish sohasini tizimli ravishda bayon etish.

2. QONUNING TARIXIY KASHFIYOTI

Benford qonunining birinchi ma'lum adabiy manbai 1881 yilda «American Journal of Mathematics» jurnalida chop etilgan Simon Nyukomning ikki sahifalik maqolasiga borib taqaladi. Kanadalik-amerikalik matematikchi va astronom, Amerikan Matematik Jamiyatining kelajakdagi prezidenti bo'lgan Nyukom logarifmik jadvallarning boshidagi sahifalar oxirgisiga qaraganda ko'proq eyilib-yeyilganini payqagan. Bu kuzatuv odamlar birinchi raqami kichik bo'lgan sonlar bilan ko'proq hisob-kitob qilishini anglatardi.

Biroq Nyukomning kashfiyoti ilmiy jamoatchilik tomonidan deyarli e'tiborsiz qoldi. Qonun 1938 yilda fizik Frank Benford tomonidan mustaqil ravishda qayta kashf etildi va keng ommalashtirildi. Benford 20 mingdan ortiq ma'lumot namunasini tahlil qilib, birinchi raqam taqsimotining logarifmik formulaga mos kelishini eksperimental tarzda isbotladi. Shu sababli qonun uning nomi bilan ataladi, garchi ustuvorlik Nyukomga tegishli bo'lsa ham.

Qonunning matematikaviy jihatdan mustahkam poydevori keyingi o'n yilliklarda, ayniqsa 20-asrning ikkinchi yarmida qurildi. Arno Berger va Teodor Hill kabi olimlarning ishlari tufayli bugun Benford qonunining stokastik va deterministik jarayonlardagi namoyon bo'lish shartlari aniq belgilangan.

3. MATEMATIKAVIY ASOS

3.1. Significand va birinchi raqam qonuni

Benford qonunining tahlili uchun muhim tushuncha — significand $S(x)$. Significand x sonining birinchi nol bo'lmagan raqamidan keyin nuqta qo'yib olingan qiymatidir; masalan:

$$S(2017) = S(-0,02017) = 2,017$$



Bu yerda $D_1(2017) = 2$ birinchi, $D_2(2017) = 0$ ikkinchi muhim raqamdir. Haqiqiy qiymatli X tasodifiy o'zgaruvchi Benford (o'nlik asos bo'yicha) deb ataladi, agar:

$$P(S(X) \leq s) = \log_{10}(s) \quad \text{barcha } 1 \leq s < 10 \text{ uchun}$$

Bu ta'rifdan har qanday Benford tasodifiy o'zgaruvchisi birinchi raqam qonunini ham qanoatlantirishini ko'rish mumkin:

$$P(D_1(X) = d) = \log_{10}((d+1)/d) \quad \text{barcha } d = 1, \dots, 9 \text{ uchun}$$

Demak, birinchi raqam 1 bo'lish ehtimoli $\log_{10}(2) \approx 0,301$, ya'ni 30,1% ni tashkil etadi, 9 bo'lish ehtimoli esa $\log_{10}(10/9) \approx 0,046$, ya'ni atigi 4,6% ni tashkil etadi. 1 raqami 9 raqamiga qaraganda 6,6 baravargacha ko'p uchraydi.

3.2. Qonunning yagona xususiyatlari

Berger va Hill (2017) ning tadqiqotlari shuni ko'rsatadiki, Benford qonuni muhim yagonalik xususiyatlariga ega. Bu taqsimot:

- masshtab-invariant: $S(X)$ va $S(aX)$ taqsimotlari har qanday $a > 0$ uchun bir xil;
- asos-invariant: yagona uzluksiz taqsimot sifatida barcha asoslarda ham o'rinli;
- yig'indi-invariant: yig'indi bo'yicha yagona taqsimot.

Klassik ehtimollik taqsimotlari — bir tekis, normal, eksponensial, gamma, Puasson va boshqalar — aniq Benford emas. Ba'zi Pareto va lognormal taqsimotlar Benfordga yaqin bo'lsa, bir tekis taqsimotlar undan keskin farq qiladi.

3.3. Ko'paytmalar va darajalar

Tasodifiy o'zgaruvchilar bilan amallar haqida muhim natijalar mavjud. Ikki mustaqil musbat tasodifiy o'zgaruvchi X va Y ning ko'paytmasi XY — agar X yoki Y Benford bo'lsa — ham Benford bo'ladi. Biroq yig'indilar uchun bu qoida o'rinli emas: summandlar mustaqil va Benford bo'lsa ham, ularning yig'indisi odatda Benford bo'lmaydi.

X tasodifiy o'zgaruvchining (X, X^2, X^3, \dots) darajalar ketma-ketligi ehtimollik 1 bilan Benford ketma-ketligi bo'ladi — faqat $\log_{10}|X|$ ning ratsional bo'lish ehtimoli nolga teng bo'lganda. X absolyut uzluksiz bo'lganda bu shart bajariladi.



4. DETERMINISTIK KETMA-KETLIKLAR

Tasodifiy jarayonlardan farqli o'laroq, deterministik sonlar ketma-ketliklari ham Benford qonuniga bo'ysunishi mumkin. $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ ketma-ketligi Benford deb ataladi, agar har qanday $1 \leq s < 10$ uchun $\{n \in \mathbb{N} : S(x_n) \leq s\}$ to'plamining tabiiy zichligi mavjud bo'lib, $\log_{10}(s)$ ga teng bo'lsa.

Ko'plab tanish ketma-ketliklar — musbat butun sonlar va tub sonlar ketma-ketliklari — Benford emas. Ammo Fibonachchi va Lukas sonlari, faktoriallar va 2 ning darajalari Benford ketma-ketliklardir.

Masalan, (2^n) ning Benford ekanligini quyidagicha isbotlash mumkin: (x_n) ketma-ketligi Benford bo'ladi — faqat $(\log_{10}|x_n|)$ ketma-ketligi mod 1 bo'yicha bir tekis taqsimlanganda. $\log_{10} 2$ irratsional son bo'lganligi sababli, Veil teoremasi asosida 2 ning darajalari Benford ekanligini ko'rish mumkin.

Dinamik tizimlar nazariyasidan olingan yanada nozik natijalar mavjud. $f(x) = ax + g(x)$ shaklida bo'lib, $g = o(x/\log x)$ shartini qanoatlantiruvchi har qanday aks ettirish orbita Benford bo'ladi — faqat $a > 1$ bo'lib, 10 ning ratsional darajasi bo'lmasa.

Ayniqsa qiziqarli muammo: $f(x) = x^2 + 1$ aks ettirish deyarli barcha boshlang'ich nuqtalar uchun Benford orbita hosil qiladi. Ammo $x_0 = 0$ dan boshlanadigan $(1, 2, 5, 26, 677, \dots)$ butun sonlar ketma-ketligi Benford ekanmi yo yo'qmi — bu savol hali ham ochiq muammo bo'lib qolmoqda. Qiziq bir fakt: bu ketma-ketlikning n -hadi balandligi n dan kam bo'lgan ikkilik daraxtlar soniga teng.

5. AMALIY QO'LLANILISHI

5.1. Moliyaviy firibgarlikni aniqlash

1990-yillar o'rtasida buxgalter Mark Nigrini Benford qonunini soliq ma'lumotlarini tekshirishda qo'llash mumkinligini aniqladi. Haqiqiy soliq ma'lumotlari odatda Benford qonuniga yaqin bo'ladi, soxta ma'lumotlar esa ko'pincha bu taqsimotdan chetga chiqadi. Shu sababli Benford mos kelish testlari samarali «qizil bayroq» vositasiga aylandi.

Bugungi kunda bu yondashuv xalqaro audit kompaniyalari, soliq idoralari va moliyaviy nazorat organlari tomonidan keng qo'llaniladi. Qonun buzilishlarini



aniqlash uchun istatistik testlar — xususan, hi-kvadrat va Kolmogorov-Smirnov testlari — Benford taqsimotidan og'ishni o'lchaydi.

5.2. Raqamli tasvir kriminalistikasi

Raqamli kameralar va grafik muharrirlarda hosil qilinadigan tasvirlarning piksel qiymatlari, siqish nisbatlari va boshqa metama'lumotlari ham Benford qonuniga bo'ysunadi. Tasvirni soxtalashtirganda yoki raqamli qayta ishlashdan o'tkazganda bu taqsimot buzilishi mumkin — bu hodisa raqamli kriminalistika sohasida tasvir autentikligini tekshirish uchun ishlatiladi.

5.3. Tabiiy fanlar va texnologiya

Benford qonunining qo'llanilishi sohalari juda keng:

- Fizika: atomlarning yarim emirilish davrlari, sayyoralar osti bosimlari;
- Biologiya: turning namunalari soni, gen uzunliklari;
- Tibbiyot: laboratoriya tahlil natijalari, kasallik statistikasi;
- Kompyuter fani: suzuvchi nuqtali hisob-kitob algoritmlarining o'rtacha xatti-harakati (Knut, 1997);
- Kvant fizikasi: faza o'tishlari va zilzila kuchlanish ko'rsatkichlarini aniqlash.

Benfordonline.net ma'lumotlar bazasida Benford qonuliga oid deyarli ming ta yozuv mavjud bo'lib, ularning uchdan ikki qismi 2000-yildan keyin paydo bo'lgan — bu qonunga bo'lgan qiziqishning jadal o'sib borayotganini ko'rsatadi.

6. NAZARIY OCHIQ MUAMMOLAR

Benford qonuniga oid ko'plab savolar mashhur ochiq matematikaviy muammolarning tabiiy ko'rinishlaridir.

Birinchi muammo. Qaysi boshlang'ich nuqtalar Benford orbita hosil qilishi masalasi normal sonlar muammosi bilan uzviy bog'liq. Normal son deb o'nlik yozilishida barcha sonli satrlar teng taqsimlangan sonlarga aytiladi. Borel teoremasi deyarli barcha sonlarning normal ekanligini kafolatlasa ham, bu muammoning umumiy holini hal etish hali qiyin bo'lib qolmoqda.

Ikkinchi muammo. Benford tasodifiy o'zgaruvchilari $S(X)$, $S(X^2)$, $S(X^3)$ ning taqsimoti bir xil bo'lgan yagona uzluksiz tasodifiy o'zgaruvchilarmi? Bu savol



Furstenberg ning $2x \bmod 1$ va $3x \bmod 1$ uchun invariant o'lchamlar haqidagi mashhur farazining bir ko'rinishidir.

Uchinchi muammo. $x_n + 2x_{n-1} + 3x_{n-2} = 0$ chiziqli farq tenglamasi ning har qanday yechimi Benford ekanmi? Bu savolga javob Shanueling transsendentlik darajasiga oid konjekturasiga bog'liq.

Umuman olganda, Benford qonunining sof yoki aralash, deterministik yoki stokastik, diskret yoki uzluksiz vaqtli, bir o'lchamli yoki ko'p o'lchamli ma'lumotlarda nima uchun namoyon bo'lishini izohlaydigan yagona universal argument yo'q. Asosiy matematik muammo — ma'lumotlar qachon qonunga bo'ysunishi va qachon bo'ysunmasligini tushuntiruvchi nazariya yaratishdan iborat.

7. XULOSALAR

Benford qonuni — 1881 yilda Nyukom tomonidan kuzatilgan, 1938 yilda Benford tomonidan ommalashtirilgan va so'nggi o'n yilliklarda zamonaviy matematik vositalar yordamida mustahkam poydevorda qurilgan noyob hodisa. Uning asosiy xulosalari quyidagicha:

1. Benford qonuni — ko'plab real hayotdagi ma'lumotlarda birinchi raqam taqsimotining aniq logarifmik formulaga mos kelishini ifodalaydi.
2. Qonun masshtab-invariantlik, asos-invariantlik va yig'indi-invariantlik kabi yagona xususiyatlarga ega bo'lib, ularni bir vaqtda qanoatlantiruvchi yagona taqsimotdir.
3. Stokastik jarayonlarda mustaqil tasodifiy o'zgaruvchilarning ko'paytmasi va absolyut uzluksiz taqsimotning darajalari Benford qonuniga yaqinlashadi.
4. Deterministik ketma-ketliklardan Fibonachchi sonlari, faktoriallar va 2 ning darajalari Benford hisoblanadi.
5. Amaliyotda qonun moliyaviy firibgarlikni aniqlash, raqamli tasvir kriminalistikasi va tabiiy fanlarning turli sohalarida muvaffaqiyatli qo'llanilmoqda.
6. Bir qator nazariy muammolar — normal sonlar, Furstenberg farazlari va Shanuel konjekturasi bilan bog'liq savollar — hali ochiq bo'lib qolmoqda.



Benford qonunining universalligi uni zamonaviy ma'lumotlar fani va raqamli texnologiyalar rivojlanishi bilan yanada dolzarblashtirmoqda. Katta hajmdagi ma'lumotlarni tahlil qilish (Big Data) va sun'iy intellekt tizimlari kengaygan sari, qonunning yangi qo'llanilish sohalari paydo bo'lishi kutilmoqda.

ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Berger A., Hill T.P. What is Benford's Law? // Notices of the AMS. — 2017. — Vol. 64, No. 2. — P. 132–134.
2. Berger A., Hill T.P. An Introduction to Benford's Law. — Princeton University Press, 2015. — 256 p.
3. Newcomb S. Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers // American Journal of Mathematics. — 1881. — Vol. 4. — P. 39–40.
4. Benford F. The law of anomalous numbers // Proceedings of the American Philosophical Society. — 1938. — Vol. 78, No. 4. — P. 551–572.
5. Nigrini M. Benford's Law: Applications for Forensic Accounting, Auditing, and Fraud Detection. — John Wiley & Sons, 2012. — 352 p.
6. Raimi R.A. The first digit problem // American Mathematical Monthly. — 1976. — Vol. 83, No. 7. — P. 521–538.
7. Knuth D.E. The Art of Computer Programming. Vol. 2: Seminumerical Algorithms. 3rd ed. — Addison-Wesley, 1997. — 784 p.
8. Benfordonline.net — Benford's Law database [Elektron resurs]. — URL: www.benfordonline.net (murojaat sanasi: 01.05.2026).