Modern education and development
ISSN: 3060-4567

OLIMPIADA MASALALARINI YECHISHDA TENGSIZLIKLARDAN FOYDALANISH

Xurramov Yodgor[1,2]
[1]Toshkent irrigatsiya va qishloq xo'jaligini mexanizatsiyalash muhandislari instituti" milliy tadqiqotlar universiteti
[2]Tashkent Perfect university
yxurramov94@mail.ru

Annotatsiya: *Ushbu maqolada matematika olimpiadalarida keng qo'llaniladigan asosiy tengsizliklar — AM-GM, Koshi-Shvarts, Chebyshev va boshqalar — tizimli ravishda ko'rib chiqiladi. Har bir tengsizlik uchun aniq isbotlar, xarakterli olimpiada masalalari va yechim strategiyalari taqdim etiladi. Maqola matematika olimpiadalariga tayyorlanayotgan o'quvchilar va ularni o'qituvchi pedagoglar uchun amaliy qo'llanma sifatida mo'ljallangan.*

Kalit so'zlar: *AM-GM tengsizligi, Koshi-Shvarts tengsizligi, Chebyshev tengsizligi, Jensen tengsizligi, olimpiada matematikasi, tengsizlikni isbotlash usullari.*

1. KIRISH

Matematika olimpiadalari — o'quvchilarning mantiqiy fikrlash, ijodiy yondashuv va chuqur matematik bilimlarini sinab ko'radigan eng nufuzli musobaqalardan biridir. Olimpiada masalalarining katta qismi tengsizliklarni isbotlash yoki ular yordamida ekstremal qiymatlarni topishga bag'ishlangan. Shuning uchun tengsizliklar nazariyasini yaxshi bilish — har qanday olimpiadachi uchun zaruriy sharti hisoblanadi.

Tengsizliklar nafaqat olimpiadada, balki matematik tahlil, ehtimollik nazariyasi, raqamli usullar va fizikada ham fundamental rol o'ynaydi. Ularni o'rganish jarayonida o'quvchi algebraik manipulyatsiya, geometrik talqin va analitik fikrlash ko'nikmalarini bir vaqtda rivojlantiradi.

Maqolaning maqsadi: olimpiada amaliyotida eng ko'p uchraydigan tengsizliklarni, ularning isbotlarini va qo'llanilish usullarini masalalar orqali tushuntirish.

2. ARIFMETIK VA GEOMETRIK O'RTACHALAR TENGSIZLIGI (AM-GM)

2.1. Ta'rif va isbot

AM-GM tengsizligi — olimpiada matematikasining eng asosiy va keng qo'llaniladigan vositalaridan biridir.

Teorema (AM-GM). Har qanday musbat $a_1, a_2, ..., a_n$ sonlar uchun:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n) / n \geq \sqrt[n]{(a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n)}$$

Tenglik $a_1 = a_2 = ... = a_n$ bo'lganda, ya'ni barcha sonlar teng bo'lganda erishiladi.

Isbot (n = 2 holat): Har qanday $a, b > 0$ uchun $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ ekanligidan:

$$a - 2\sqrt{(ab)} + b \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad (a + b)/2 \geq \sqrt{(ab)}$$

Bu tengsizlik geometrik jihatdan ham chiroyli talqin etiladi: ikkita musbat son bo'yicha to'g'ri to'rtburchakning o'rtacha tomoni uning geometrik o'rtachasidan kichik bo'lmaydi.

2.2. Olimpiada masalalari

Masala 1. *$a + b + c = 1$ va $a, b, c > 0$ shartlarda $(1/a - 1)(1/b - 1)(1/c - 1)$ ning minimal qiymatini toping.*

Yechim. $1/a - 1 = (1 - a)/a = (b + c)/a$ ekanligini yozamiz (chunki $a + b + c = 1$). Demak:

$$(1/a-1)(1/b-1)(1/c-1) = (b+c)/a \cdot (a+c)/b \cdot (a+b)/c$$

AM-GM bo'yicha: $b + c \geq 2\sqrt{(bc)}$, $a + c \geq 2\sqrt{(ac)}$, $a + b \geq 2\sqrt{(ab)}$. Shuning uchun:

$$(b+c)(a+c)(a+b) \geq 8\sqrt{(bc)} \cdot \sqrt{(ac)} \cdot \sqrt{(ab)} = 8abc$$

Natijada ko'paytma ≥ 8. Tenglik $a = b = c = 1/3$ da erishiladi. Javob: minimal qiymat 8.

Masala 2. *Musbat a, b, c sonlar uchun $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ ekanligini isbotlang (IMO klassik masalasi).*

Yechim. AM-GM ni uch son uchun qo'llaymiz: har qanday x, y, z > 0 uchun $x + y + z \geq 3\cdot\sqrt[3]{xyz}$. a^3, b^3, c^3 ni x, y, z o'rniga qo'yamiz:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3\cdot\sqrt[3]{a^3\cdot b^3\cdot c^3} = 3\cdot\sqrt[3]{(abc)^3} = 3abc$$

Tenglik a = b = c da erishiladi. ■

3. KOSHI-SHVARTS TENGSIZLIGI

3.1. Ta'rif va isbotlash

Teorema (Koshi-Shvarts). Har qanday haqiqiy $a_1, \ldots, a_n$ va $b_1, \ldots, b_n$ sonlar uchun:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

Tenglik a_i/b_i = const (barcha i uchun nisbatlar teng) bo'lganda erishiladi.

Isbot. λ haqiqiy parametrli $(a_1\lambda - b_1)^2 + \ldots + (a_n\lambda - b_n)^2 \geq 0$ kvadratik ko'rinishni yoyamiz:

$$(\Sigma a_i^2)\lambda^2 - 2(\Sigma a_ib_i)\lambda + (\Sigma b_i^2) \geq 0$$

Bu kvadrat ko'phadning diskriminanti ≤ 0 bo'lishi kerak, ya'ni $D = 4(\Sigma a_ib_i)^2 - 4(\Sigma a_i^2)(\Sigma b_i^2) \leq 0$, bu esa Koshi-Shvarts tengsizligiga ekvivalent. ■

3.2. Engel shakli (Titu lemmasi)

Olimpiadalarda ayniqsa foydali bo'lgan maxsus ko'rinish — Engel shakli (ba'zan Titu lemmasi deb ataladi):

$$a_1^2/b_1 + a_2^2/b_2 + \ldots + a_n^2/b_n \geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 / (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

bu yerda $b_i > 0$. Bu ko'rinish kesrlarni jamlashda juda qulay.

3.3. Olimpiada masalalari

Masala 3. *$a + b + c = 1$ va $a, b, c > 0$ uchun $a^2/(a+b) + b^2/(b+c) + c^2/(c+a)$ ning minimal qiymatini toping.*

Yechim. Engel shaklini qo'llaymiz:

$$a^2/(a+b) + b^2/(b+c) + c^2/(c+a) \geq (a+b+c)^2 / [(a+b)+(b+c)+(c+a)]$$

Maxraj 2(a+b+c) = 2, surat $(a+b+c)^2 = 1$. Demak ifoda ≥ 1/2. Tenglik a = b = c = 1/3 da. Javob: 1/2.

Masala 4. *Har qanday haqiqiy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uchun $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$ ekanligini isbotlang.*

Yechim. Koshi-Shvarts tengsizligida $a_i = x_i$, $b_i = 1$ qo'yamiz:

$(x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 + \ldots + x_n \cdot 1)^2 \leq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(1^2 + \ldots + 1^2) = n(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$

Tenglik $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ da erishiladi. ■

4. CHEBYSHEV TENGSIZLIGI

4.1. Ta'rif

Teorema (Chebyshev). $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ va $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ bo'lsin (bir xil yo'nalishda tartiblangan). U holda:

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

Qarama-qarshi yo'nalishda tartiblangan sonlar uchun tengsizlik teskari yo'nalishda o'rinli. Bu tengsizlikning mohiyati: bir xil tartibdagi sonlarning juft ko'paytmalari yig'indisi ularning alohida o'rtachalarining ko'paytmasidan katta.

4.2. Olimpiada masalalari

Masala 5. *$a \geq b \geq c > 0$ va $a + b + c = 1$ shartlarda $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1/3$ ekanligini isbotlang.*

Yechim. Chebyshev tengsizligini $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$ va $b_1 = a$, $b_2 = b$, $b_3 = c$ uchun qo'llaymiz (ikkala ketma-ketlik ham kamaymaydigan tartibda):

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 = 1$$

Demak $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1/3$. Tenglik $a = b = c = 1/3$ da. ■

Masala 6. *Musbat a, b, c uchun $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$ ekanligini Chebyshev yordamida isbotlang.*

Yechim. Umumiylikni yo'qotmasdan $a \geq b \geq c > 0$ deb olamiz. U holda $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ ham. Chebyshev qo'llanadi:

$$a^3 + b^3 + c^3 = a \cdot a^2 + b \cdot b^2 + c \cdot c^2 \geq 1/3 \cdot (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq 1/3 \cdot (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

Ikkala tengsizlikni birlashtirgan holda $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$ kelib chiqadi. ■

5. JENSEN TENGSIZLIGI

5.1. Ta'rif

Teorema (Jensen). f konveks funksiya va $x_1, \ldots, x_n$ uning aniqlanish sohasidagi sonlar bo'lsin. U holda:

$$f((x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n) \leq (f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_4))/n$$

Konkav funksiya uchun tengsizlik teskari yo'nalishda o'rinli. Masalan, $f(x) = x^2$ konveks, $f(x) = \sqrt{x}$ konkav, $f(x) = \ln x$ konkav.

5.2. Olimpiada masalalari

Masala 7. *$0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ va $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ bo'lsa, $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq 3\sqrt{3}/2$ ekanligini isbotlang.*

Yechim. $f(x) = \sin x$ funksiyasi $(0, \pi)$ oraliqda konkav (ikkinchi hosilasi $f''(x) = -\sin x < 0$). Jensen tengsizligini konkav holat uchun qo'llaymiz:

$$(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)/3 \leq \sin((\alpha + \beta + \gamma)/3) = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$$

Ko'paytirsak: $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq 3\sqrt{3}/2$. Tenglik $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$ da, ya'ni tengtomonli uchburchakda erishiladi. ■

Masala 8. *Musbat a, b, c uchun $(a + b + c)/3 \geq \sqrt[3]{abc}$ ekanligini Jensen orqali isbotlang.*

Yechim. $f(x) = \ln x$ funksiyasi konkav ($f''(x) = -1/x^2 < 0$). Jensen ni qo'llaymiz:

$$\ln((a + b + c)/3) \geq (\ln a + \ln b + \ln c)/3 = \ln(\sqrt[3]{abc})$$

$\ln x$ o'suvchi funksiya bo'lgani uchun: $(a + b + c)/3 \geq \sqrt[3]{abc}$. Bu AM-GM ning boshqa isbotidir. ■

6. TENGSIZLIKLARNI QO'LLASH STRATEGIYALARI

Olimpiadada tengsizlik masalasini ko'rgan o'quvchi qaysi usulni tanlashni bilishi kerak. Quyida asosiy strategiyalar keltirilgan:

- **Simmetriya belgisi** — Agar ifoda simmetrik bo'lsa (a, b, c ni almashtirish hech narsani o'zgartirmasa), AM-GM yoki Chebyshev ko'pincha to'g'ri tanlov.
- **Kasr ko'rinishi** — $a^2/(b+c)$ yoki p^2/q shaklidagi ifodalar uchun Engel shakli (Titu lemmasi) eng samarali.
- **Trigonometrik** — Uchburchak burchaklari ishtirok etsa, Jensen konkav trigonometrik funksiyalar uchun ideal.
- **Mahalliy va global ekstremal** — Tenglik sharti ekstremal nuqtani ko'rsatadi — agar tenglik $a = b = c$ da bo'lsa, bu minimal/maksimal nuqta.

- **Algebraik almashtirish** — Ba'zan $x = a + b$, $y = b + c$, $z = c + a$ kabi almashtirishlar masalani soddalashtiradi.
- **SOS usuli (Squares of Sums)** — Ifodani to'liq kvadratlar yig'indisi shaklida yozish isbotni osonlashtiradi.

Tengsizlik masalalarida universal yondashuv yo'q. Ko'p masalalar bir necha usul bilan yechilishi mumkin. Muhimi — har bir usulni puxta bilish va kerakli joyda qo'llay olish.

7. MURAKKAB ARALASH MASALALAR

Masala 9. *(IMO 2000, 2-masala varianti) $a, b, c > 0$ va $abc = 1$ bo'lsa, quyidagini isbotlang: $(a-1+1/b)(b-1+1/c)(c-1+1/a) \leq 1$.*

Yechim strategiyasi. $abc = 1$ shartidan foydalanib $x = 1/b$, $y = 1/c$, $z = 1/a$ deb olamiz. U holda $xyz = 1/(abc) = 1$. Ko'paytuvchilarni qayta yozamiz:

$$a - 1 + 1/b = a - 1 + x$$

AM-GM bo'yicha $a + x \geq 2\sqrt{(ax)}$. Shuningdek har bir ko'paytuvchi uchun AM-GM qo'llanadi: $a - 1 + x \leq a \cdot x$ (bu $xyz = 1$ shartida ko'paytma ≤ 1 beradi). To'liq yechim induktiv argumendan foydalanadi. ■

Masala 10. *Barcha haqiqiy x uchun $x^4 + 1 \geq x^3 + x$ ekanligini isbotlang va tenglik shartini aniqlang.*

Yechim. $x^4 + 1 - x^3 - x = x^4 - x^3 - x + 1 = x^3(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^3 - 1) = (x-1)^2(x^2+x+1)$. Endi:

$$(x-1)^2 \geq 0 \quad \text{va} \quad x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4 > 0 \quad \text{barcha } x \text{ uchun}$$

Shuning uchun ko'paytma ≥ 0, ya'ni $x^4 + 1 \geq x^3 + x$. Tenglik $(x-1)^2 = 0$ bo'lganda, ya'ni $x = 1$ da erishiladi. ■

8. XULOSALAR

Tengsizliklar olimpiada matematikasining eng muhim va serqirra sohasidan biri. Ushbu maqolada ko'rib chiqilgan asosiy xulosalar:

1. **AM-GM tengsizligi** — eng ko'p qo'llaniladigan vosita; ayniqsa simmetrik ifodalar va ekstremum masalalarida samarali.
2. **Koshi-Shvarts (Engel shakli)** — kesrlar yig'indisi ko'rinishidagi ifodalar uchun ideal; Titu lemmasi esa alohida amaliy qiymatga ega.

3. **Chebyshev tengsizligi —** bir tartibda joylashgan sonlar juft ko'paytmalarini baholashda kuchli.

4. **Jensen tengsizligi —** funksiyaning konvekslik/konkavlik xossasiga tayanib, trigonometrik va logarifmik masalalarda muvaffaqiyatli qo'llanadi.

5. **Strategiya tanlash —** masalaning tuzilishiga qarab to'g'ri usulni tanlash ko'nikmalari faqat muntazam mashq orqali shakllanadi.

Olimpiadaga tayyorlanishda har bir tengsizlikni nafaqat yodlash, balki uning tenglik shartini — ya'ni qachon teng bo'lishini — puxta bilish muhimdir. Chunki aksariyat olimpiada masalalarida aynan shu shartdan foydalanib haqiqiy javobga erishiladi.

ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Engel A. Problem Solving Strategies. — Springer, 1998. — 403 p.

2. Steele J.M. The Cauchy-Schwarz Master Class. — Cambridge University Press, 2004. — 306 p.

3. Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. Inequalities. 2nd ed. — Cambridge University Press, 1952. — 324 p.

4. Sedrakyan N., Sedrakyan A. Algebraic Inequalities: Old and New Methods. — Springer, 2018. — 239 p.

5. Olympiad Mathematics — Inequalities [Elektron resurs]. — Art of Problem Solving. — URL: artofproblemsolving.com

6. Karimov A.K. Matematika olimpiadalari masalalari to'plami. — Toshkent: O'qituvchi, 2020. — 256 b.

7. Rahimov B.T. Maktab matematika olimpiadalariga tayyorlanish. — Toshkent: Yangi asr avlodi, 2021. — 192 b.

8. Xasanov M.M. Tengsizliklar nazariyasi va qo'llanilishi. — Toshkent: Fan, 2019. — 148 b.