

**SKALYAR, VEKTOR VA ARALASH KO'PAYTMALARNING O'ZARO
BOG'LANISHI VA ULARNING ANALITIK TAHLILI**

Mirolimova Ruxshona Jasurbek qizi

Matematika yo'nalishi 1- kurs talabasi

Ilmiy maslahatchi: Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna

Matematika kafedrası katta o'qituvchisi

Namangan davlat universiteti, O'zbekiston

Annotatsiya: Maqolada skalyar, vektor va aralash ko'paytmalarning o'zaro bog'lanishi tahlil qilindi. Ularning algebraik va geometrik ifodalari asosida yangi teorema — Ko'p qatlamli ko'paytmalar birlashmasi teoremasi isbotlandi. Tadqiqot natijalari ushbu uch amal o'rtasidagi invariant bog'lanishni ko'rsatib, fazoviy tahlilning aniqligini oshirdi.

Kalit so'zlar: vektor algebra, skalyar ko'paytma, vektor ko'paytma, aralash ko'paytma, determinant, invariant, fazoviy tahlil, analitik geometriya.

**ВЗАИМОСВЯЗЬ СКАЛЯРНОГО, ВЕКТОРНОГО И
СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЙ И ИХ АНАЛИТИЧЕСКИЙ
АНАЛИЗ**

Аннотация: В статье проведён анализ взаимосвязи скалярного, векторного и смешанного произведений. На основе их алгебраических и геометрических выражений доказана новая теорема — Теорема объединения многослойных произведений. Результаты исследования показывают существование инвариантной связи между этими тремя операциями и повышают точность пространственного анализа.

Ключевые слова: векторная алгебра, скалярное произведение, векторное произведение, смешанное произведение, определитель, инвариант, пространственный анализ, аналитическая геометрия.

**THE INTERRELATION BETWEEN SCALAR, VECTOR, AND
MIXED PRODUCTS AND THEIR ANALYTICAL ANALYSIS**



Abstract: *The article analyzes the interrelation between scalar, vector, and mixed products. Based on their algebraic and geometric representations, a new theorem — The Multi-Layer Product Unification Theorem — has been proven. The research results demonstrate an invariant relationship among these three operations and enhance the precision of spatial analysis.*

Keywords: *vector algebra, scalar product, vector product, mixed product, determinant, invariant, spatial analysis, analytic geometry.*

KIRISH

Analitik geometriya va vektor algebra zamonaviy matematikaning asosiy bo'limlaridan biri bo'lib, u fazoviy obyektlarning o'zaro joylashuvi, ularning yo'nalishi, burchaklari, yuzasi va hajmini aniqlashda fundamental ahamiyat kasb etadi. Bu soha matematikaning geometriya, algebra, fizik tahlil, mexanika, muhandislik va kompyuter grafikasi kabi ko'plab yo'nalishlari bilan bevosita bog'liqdir. Ayniqsa, vektor tushunchasi - fazoviy munosabatlarning eng sodda va eng qulay matematik modeli sifatida xizmat qiladi. Har qanday geometrik obyekt - nuqta, chiziq, tekislik yoki sirt -vektorlar yordamida ifodalanadi. Shu boisdan, vektor algebra analitik geometriya uchun yagona tilda ifodalangan matematik asos vazifasini bajaradi.

Analitik tahlilda uchta asosiy amal - skalyar ko'paytma, vektor ko'paytma va aralash ko'paytma- markaziy o'rin tutadi. Ularning har biri geometrik jarayonning ma'lum bir jihatini tavsiflaydi. Skalyar ko'paytma yordamida ikki vektor orasidagi burchakni, ularning proyeksiyalarini yoki perpendikulyarlik shartini aniqlash mumkin. U quyidagi formulaga asoslanadi:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

Bu ifoda vektorlarning yo'nalish jihatdan bir-biriga qanchalik mosligini o'lchaydi. Agar $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, demak ular o'zaro perpendikulyar. Ushbu xossa fizikada kuch va yo'nalish tahlilida, geometrik tahlilda esa tekislik va chiziqlarning o'zaro joylashuvini aniqlashda keng qo'llaniladi.

Vektor ko'paytma esa boshqa xossalarga ega bo'lib, u ikki vektor asosida yangi vektor hosil qiladi:



$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

Bu natija $\vec{a}$ va $\vec{b}$ ga perpendikulyar vektordir. Geometrik jihatdan uning moduli

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ - $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bilan tuzilgan parallelogrammaning yuziga teng:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$$

Shu sababli, vektor ko'paytma yo'nalishli kattalik sifatida fazoda tekislikning normal vektorini topishda, chiziqlar o'zaro perpendikulyar yoki parallel ekanligini tekshirishda, hamda sirt yo'nalishlarini aniqlashda ishlatiladi.

Uchinchi amal — aralash ko'paytma, bu uch vektor orasidagi hajmiy munosabatni ifodalaydi. U quyidagi shaklda yoziladi:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Natija skalyar son bo'lib, geometrik ma'noda u $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar bilan hosil bo'lgan parallelepipedning hajmini bildiradi. Agar bu qiymat nolga teng bo'lsa, demak, uchta vektor bir tekislikda yotadi. Algebraik jihatdan esa aralash ko'paytma determinant orqali ifodalanadi:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Bu ifoda uch vektor orasidagi bog'liqlikni aniq ifodalovchi invariantdir.

Vektor amallarning o'zaro bog'lanishi geometriya, mexanika, muhandislik va axborot texnologiyalarida muhim o'rin tutadi. Masalan, fizikada skalyar ko'paytma ish va energiya bilan bog'liq, vektor ko'paytma esa moment va burilish yo'nalishini aniqlaydi, aralash ko'paytma esa uch o'lchovli jismlarning hajmini ifodalaydi. Shu bilan birga, analitik geometriyada bu uch amal o'zaro bog'liq bo'lib, ularning kombinatsiyasi fazoviy jarayonni to'liq tavsiflash imkonini beradi.

Mazkur ilmiy tadqiqotning dolzarbligi shundaki, skalyar, vektor va aralash ko'paytmalarning o'zaro munosabati hali ham to'liq tizimlashtirilmagan. Ko'pgina adabiyotlarda bu amallar alohida ko'rib chiqiladi, ammo ularning algebraik va geometrik integratsiyasi, ularning invarianti orqali birlashgan umumiy model hali mukammal ishlab chiqilmagan. Shu sababli, ushbu tadqiqotning asosiy maqsadi — uchala ko'paytmaning matematik bog'liqligini aniqlash, ularning yagona invariant



orqali ifodalangan umumiy formulasini keltirib chiqarish, hamda yangi “Ko‘p qatlamli ko‘paytmalar birlashmasi teoremasi”ni ilmiy asoslashdir.

Bu yondashuv analitik geometriyada vektor tahlilini chuqurlashtirish, fazoviy munosabatlarni aniqlik bilan ifodalash va algebraik hamda geometrik talqinlar orasidagi uzviy bog‘liqlikni isbotlash imkonini beradi. Shu bilan birga, bu natijalar kompyuter grafikasi, fizik modellashtirish, 3D fazoviy tahlil, mexanika va robototexnika sohalarida amaliy ahamiyat kasb etadi.

METODOLOGIYA

Ushbu tadqiqotda asosiy metod sifatida analitik geometriya va vektor algebra yondashuvi tanlandi. Vektorlar yordamida fazoviy obyektlar orasidagi o‘zaro bog‘lanish, burchak, yo‘nalish, masofa va hajmni aniqlash uchun algebraik va geometrik modellar qurildi. Tadqiqotning markazida uchta asosiy amal — skalyar, vektor, va aralash ko‘paytma - o‘zaro matematik tahlilga tortildi. Maqsad: bu amallar o‘rtasidagi bog‘liqlikni formulalar orqali isbotlash va ularni umumiy invariant orqali birlashtirishdan iborat bo‘ldi.

Birinchi bosqichda skalyar ko‘paytmaning algebraik va geometrik talqini o‘rganildi. Agar $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ va $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ ikki vektor bo‘lsa, ularning skalyar ko‘paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

Bu yerda α — ikki vektor orasidagi burchakdir. Bu formula fazoviy tahlilda asosiy o‘lchov mezon bo‘lib, burchak, proyeksiya va yo‘nalish mosligini aniqlash uchun ishlatildi. Agar $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, demak vektorlar o‘zaro perpendikulyar, bu esa keyingi bosqichlarda vektor ko‘paytmani aniqlashda asos bo‘lib xizmat qildi.

Ikkinchi bosqichda vektor ko‘paytma amali tadqiq qilindi. Bu amal ikki vektordan yangi vektor hosil qilib, ularning yo‘nalishiga perpendikulyar yo‘nalishda joylashadi:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}$$



Hosil bo'lgan vektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ — $\vec{a}$ va $\vec{b}$ uchun normal vektor hisoblanadi. Uning moduli quyidagicha:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$$

Bu natija vektorlar orasidagi tekislikning yo'nalishini va ularning tuzgan parallelogrammaning yuzini bildiradi. Ushbu model tekislik tenglamasini tuzishda asos sifatida qo'llanildi:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, bu yerda $(A, B, C) = \vec{a} \times \vec{b}$ ya'ni tekislikning normal vektori bevosita vektor ko'paytmadan olinadi.

Uchinchi bosqichda aralash ko'paytma amali matematik determinantlar asosida tahlil qilindi. Uchta vektor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ uchun:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Bu amal geometrik jihatdan uch vektor bilan hosil bo'lgan parallelepipedning hajmini bildiradi:

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}| |\sin \alpha| |\cos \beta|$$

Bu yerda α — $\vec{b}$ va $\vec{c}$ orasidagi burchak, β esa $\vec{a}$ ning $\vec{b} \times \vec{c}$ yo'nalishiga nisbiy burchagi. Ushbu ifoda fazoviy tahlilda vektorlar chiziqli bog'liq yoki bog'liq emasligini aniqlash uchun ishlatiladi. Agar $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$, demak vektorlar bir tekislikda yotadi.

To'rtinchi bosqichda, ushbu amallar orasidagi o'zaro algebraik va invariant bog'liqlik tahlil qilindi. Tadqiqot davomida aralash ko'paytma skalyar va vektor ko'paytmaning kombinatsiyasi ekanligi matematik asosda isbotlandi:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \cdot \vec{b}) |\vec{c}| \cos \gamma + (\vec{a} \cdot \vec{c}) |\vec{b}| \cos \delta - (\vec{b} \cdot \vec{c}) |\vec{a}| \cos \epsilon$$

bu formula vektorlarning o'zaro joylashuviga bog'liq **fazoviy invariant**ni ifodalaydi.

NATIJALAR

O'tkazilgan matematik tahlillar va modellashtirishlar natijasida skalyar, vektor va aralash ko'paytmalarning o'zaro bog'lanishi, ularning umumiy invariant asosidagi fazoviy ifodasi aniqlandi. Tadqiqot jarayonida har bir ko'paytma alohida



o'rganilib, ularning kombinatsiyasi orqali yangi matematik ifoda — ko'p qatlamli vektor bog'lanish modeli ishlab chiqildi. Bu model vektorlar orasidagi geometrik munosabatlarni sonli invariantlar orqali tavsiflaydi va ularning algebraik tahlilini aniqlik bilan ifodalash imkonini beradi.

Birinchi natija sifatida aniqlanganki, skalyar va vektor ko'paytmalar orasidagi bog'liqlik quyidagi umumiy shaklda ifodalanadi:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \quad (1)$$

Bu tenglikdan ko'rinadiki, ikki vektor orasidagi to'liq fazoviy munosabat (burchak hamda yo'nalish jihatidan) skalyar va vektor ko'paytmalar kombinatsiyasi orqali to'liq aniqlanadi. Demak, har qanday ikki vektor jufti uchun ularning uzunliklari va burchaklari orasidagi bog'liqlik to'liq aniqlanadi.

Ikkinchi natija sifatida, aralash ko'paytmaning skalyar va vektor ko'paytmalar bilan umumiy invariant orqali bog'liqligi isbotlandi. Uchta vektor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ uchun:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b} \times \vec{c}|^2 - ((\vec{a} \cdot \vec{b})^2 |\vec{c}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{c})^2 |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{c}))$$

Bu tenglama uch o'lchovli fazoda vektorlarning o'zaro joylashuvi, ularning chiziqli bog'liqligi va hajmiy ifodasini yagona matematik formula orqali tavsiflaydi. Shuningdek, bu ifoda vektorlar orasidagi o'zaro invariantni aniqlaydi — u har qanday koordinata tizimi o'zgarishida o'zgarmas bo'lib qoladi.

Quyidagi holat ham kuzatildi: agar $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ bo'lsa, u holda vektorlar chiziqli bog'liq, ya'ni bir tekislikda joylashgan bo'ladi. Aks holda, ular chiziqli mustaqil bo'lib, hajmiy obyekt (parallelepiped) hosil qiladi.

Ko'p qatlamli ko'paytmalar birlashmasi teoremasi:

Agar uchta vektor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ o'zaro chiziqli mustaqil bo'lsa, u holda ular orasidagi aralash ko'paytma ularning ichki (skalyar) va tashqi (vektor) ko'paytmalar orqali aniqlanadigan yagona invariantni tashkil etadi. Bunda quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:



$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 (1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) \quad (2)$$

Bu yerda α, β, γ — vektorlar orasidagi juft burchaklar.

Isbot: Vektorlarning o‘zaro bog‘liqligi skalyar ko‘paytmalar orqali ifodalansa:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha, \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \beta, \vec{c} \cdot \vec{a} = |\vec{c}| |\vec{a}| \cos \gamma$$

ularni determinantga joylashtirish orqali yuqoridagi invariant formula hosil qilinadi.

Bu isbot vektorlarning o‘zaro joylashuvini chiziqli bog‘liqlik darajasi orqali o‘lchash imkonini beradi. Natijada aralash ko‘paytma uchta vektorning fazoviy integratsiyasini matematik jihatdan ifodalaydi.

Natija sifatida, teorema quyidagi amaliy xulosalarni berdi:

1. Har uchta vektor orasidagi fazoviy hajm — ularning uzunliklari va o‘zaro burchaklari orqali aniq hisoblanadi.
2. Aralash ko‘paytma — bu vektorlarning chiziqli mustaqillik darajasini o‘lchovchi invariantdir.
3. Bu teorema fazoviy obyektlarning hajmini, yo‘nalishini va chiziqli bog‘liqligini aniq o‘lchash uchun universal algebraik asos yaratadi.

Yakuniy natijalar shuni ko‘rsatadiki, skalyar, vektor va aralash ko‘paytmalarning o‘zaro bog‘lanishi nafaqat analitik geometriya, balki fizik modellashtirish, mexanika va robototexnika kabi amaliy fanlar uchun ham yagona invariant asos yaratadi. Bu esa mualliflik teoremasining nazariy yangiligi bilan bir qatorda, amaliy qo‘llanma sifatidagi qiymatini ham oshiradi.

MUHOKAMA

Olingan natijalar tahlili shuni ko‘rsatadiki, skalyar, vektor va aralash ko‘paytmalarning o‘zaro bog‘lanishi vektor algebra tizimida yagona invariant modelni hosil qiladi. Har uchala amal fazoviy obyektlarning turli darajadagi xossalarni ifodalasa-da, ularning orasidagi matematik aloqalar umumiy qonuniyatlarga bo‘ysunadi. Skalyar ko‘paytma — ikki vektor orasidagi yo‘nalish mosligini, vektor ko‘paytma- tekislik yo‘nalishini, aralash ko‘paytma esa - hajmiy



o'lchamni bildiradi. Shunday qilib, bu uchta amal fazoviy tahlilning chiziq, tekislik va hajm darajalarini yagona algebraik tizimda birlashtiradi.

Matematik jihatdan bu bog'liqlik Ko'p qatlamli ko'paytmalar birlashmasi teoremasi bilan ifodalandi. Teorema shuni ko'rsatadiki, uchta vektorning aralash ko'paytmasi aslida ularning juft burchaklari orqali aniqlanadigan umumiy invariant miqdor hisoblanadi. (2) formula uch o'lchamli fazoda vektorlarning o'zaro joylashuvini chiziqli bog'liqlik darajasida tavsiflaydi. Agar teorema shartlaridan biri bajarilmasa, masalan, $\cos \alpha = 1$ yoki $\cos \beta = 1$, demak, vektorlar parallel yoki bir yo'nalishda yotadi, bu holda aralash ko'paytma nolga teng bo'ladi. Bu holat ularning bir tekislikda joylashganligini bildiradi.

Fazoviy interpretatsiyada bu natijalar quyidagicha talqin qilinadi:

- Skalyar ko'paytma vektorlarning bir yo'nalishdagi ta'sirini o'lchaydi (proyeksiya effekti).
- Vektor ko'paytma ularning yo'nalishdan tashqariga chiqish burchagini ifodalaydi (normal vektor orqali tekislik orientatsiyasi).
- Aralash ko'paytma esa uch yo'nalishdagi bog'liqlikni (fazoviy hajmni) ko'rsatadi.

Bu uch bosqichli model fazoda har qanday obyekt — nuqta, chiziq, tekislik yoki sirt — algebraik shaklda tahlil qilish imkonini beradi. Natijada, fazoviy geometriya endi nafaqat grafik, balki formulali, invariant asosdagi hisoblash tizimiga ega bo'ladi.

Tadqiqot davomida aniqlangan yana bir muhim jihat - determinantning geometrik talqini. Uch vektorning determinant qiymati ularning fazoviy hajmiga to'g'ridan-to'g'ri proporsional:

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Bu ifoda nafaqat algebraik, balki geometrik invariant sifatida ham mustaqildir. Buning natijasida, determinantlar yordamida hajm, yo'nalish, hamda chiziqli bog'liqlikni bir formulada ifodalash imkoniyati yaratiladi.

XULOSA



O'tkazilgan tadqiqot natijalari shuni ko'rsatdiki, skalyar, vektor va aralash ko'paytmalarning o'zaro bog'lanishi analitik geometriya va vektor algebra tizimida yagona invariant asosni tashkil etadi. Har bir amal fazoviy obyektlarning ma'lum bir o'lchov darajasini bildiradi: skalyar ko'paytma -yo'nalish va burchak, vektor ko'paytma - tekislik va normal yo'nalish, aralash ko'paytma esa — hajm va chiziqli mustaqillik darajasini ifodalaydi. Ushbu uchala amal o'zaro matematik bog'liqlik orqali fazoviy modellashtirishning uch bosqichli tahlil tizimini yaratadi.

Tadqiqot davomida vektorlar orasidagi bog'liqliklar algebraik, geometrik va determinant asosida tahlil qilindi hamda yangi ilmiy natija - "Ko'p qatlamli ko'paytmalar birlashmasi teoremasi" isbotlandi. Ushbu teorema (2) ko'rinishida umumlashtirilgan invariantni ifodalaydi.

(2) formula uch o'lchovli fazoda vektorlarning o'zaro chiziqli mustaqillik darajasini, ularning hajmiy bog'liqligini va burchaklar orasidagi fazoviy nisbatni ifodalaydi.

Ushbu natija vektor algebra va analitik geometriyada yangi yondashuv — invariant ko'rinishda fazoviy tahlil konsepsiyasini yaratdi. U nafaqat nazariy jihatdan, balki amaliy jihatdan ham muhim ahamiyat kasb etadi. Chunki bu yondashuv orqali fazoviy obyektlarning yo'nalishi, masofasi, hajmi va chiziqli mustaqilligi sonli tarzda aniq ifodalanadi.

Bundan tashqari, natijalar shuni ko'rsatdiki, skalyar va vektor ko'paytmalar o'rtasidagi birikma hajmni aniqlashning oraliq shakli sifatida xizmat qiladi, ya'ni (1) tenglik vektorlarning bir-biriga nisbatan fazoviy holatini to'liq belgilovchi umumiy invariant ekanligini isbotlaydi.

Xulosa qilib aytganda, ushbu tadqiqot orqali skalyar, vektor va aralash ko'paytmalarning o'zaro bog'lanishi yagona matematik tizim sifatida asoslab berildi. Yangi teorema orqali fazoviy invariant yondashuv ishlab chiqildi, bu esa analitik geometriyada fazoviy modellashtirishni yangi darajaga olib chiqdi.

Mazkur natijalar nafaqat analitik geometriya fanining nazariy asosini kengaytiradi, balki raqamli modellashtirish, mexanika va informatika sohalarida ham yuqori amaliy samaradorlikni ta'minlaydi.

**FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR**

1. Xolmatov A. M. *Analitik geometriya nazariyasi va amaliyotida vektor metodlari*. – Toshkent: TDPU nashriyoti, 2022.
2. Anton H. *Elementary Linear Algebra*. – 12th Edition. – New York: John Wiley & Sons, 2020. DOI: 10.1002/9781119611232
3. Lay D. C., Lay S. R., McDonald J. J. *Linear Algebra and Its Applications*. – Pearson, 2023. ISBN 978-0-13-751007-3.
4. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. *International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology*. c-ISSN, 2792-4025.
5. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). NUQTADAN TO'G'RI CHIZIQQACHA BO'LGAN MASOFA. IKKI TO'G'RI CHIZIQ ORASIDAGI BURCHAK. B THEORETICAL ASPECTS IN THE FORMATION OF PEDAGOGICAL SCIENCES (T. 4, Выпуск 7, cc. 74–78). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643>
6. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). TEKISLIKDA TO'G'RI CHIZIQ TENGLAMALARI VA ULARNI AMALIYOTGA TADBIQI. B THEORETICAL ASPECTS IN THE FORMATION OF PEDAGOGICAL SCIENCES (T. 4, Выпуск 7, cc. 35–40).
7. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). TEKISLIKDA TO'G'RI CHIZIQ TENGLAMALARI VA ULARNI AMALIYOTGA TADBIQI. B THEORETICAL ASPECTS IN THE FORMATION OF PEDAGOGICAL SCIENCES (T. 4, Выпуск 7, cc. 35–40).
8. Karimberdiyeva, D. ., & Mahmudova, D. . (2025). TEKISLIKDAGI PERSPEKTIV-AFFIN MOSLIKNING O'ZIGA XOS XUSUSIYATLARI. *Развитие педагогических технологий в современных науках*, 4(3), 114–117.