



ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASIDAN BOSHLANG'ICH FUNKSIYANI ANIQLASHNING TESKARI MASALASI

Mualliflar: **Rozimboyeva Aziza Ibragimovna**

Osiyo halqaro universiteti Matematika fakulteti Matematika yo'nalishi

MM2 – MAT-25 guruhi talabasi.

*Doniyor G'afurovich. "Osiyo halqaro universiteti" kafedrası dotsenti **katta yordam beradi.***

Annotatsiya: Ushbu maqolada issiqlik tarqalish tenglamasi uchun boshlang'ich funksiyani aniqlash bilan bog'liq teskari masala o'rganiladi. Parabolik tipdagi tenglamalar uchun Grin funksiyasi, integral ifodalar, yechimning tuzilishi hamda boshlang'ich shartni qayta tiklash metodlari yoritiladi. Masalada kuzatiladigan ill-posedlik, funksiyaning barqaror emasligi va yechimning yagona bo'lishi kabi nazariy xususiyatlar ko'rib chiqiladi. Maqola **O. Zikirovning "Matematik fizika tenglamalari"** qo'llanmasidagi ilmiy asoslar hamda issiqlik tarqalish tenglamasining integral yechimlari asosida yozilgan.

Kalit so'zlar: Issiqlik tarqalish tenglamasi, teskari masala, Grin funksiyasi, boshlang'ich funksiyani aniqlash, parabolik tenglama, integral ifoda, boshlang'ich-chegaraviy masala, barqarorlik, ill-posed masala.

Аннотация: В данной статье изучается обратная задача, связанная с определением начальной функции для уравнения теплопроводности. Рассматриваются функции Грина для параболического типа уравнений, интегральные представления, структура решения, а также методы восстановления начального условия. Изучаются такие теоретические свойства задачи, как некорректность, неустойчивость функции и единственность решения. Статья написана на основе научных положений учебного пособия О. Зикирова «Уравнения математической физики» и интегральных решений уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: Уравнение теплопроводности, обратная задача, функция



Грина, определение начальной функции, параболическое уравнение, интегральное представление, начально-краевая задача, устойчивость, некорректно поставленная задача.

Abstract: This article studies the inverse problem of determining the initial function for the heat conduction equation. For parabolic-type equations, the Green's function, integral representations, the structure of the solution, and methods for reconstructing the initial condition are discussed. The article also examines theoretical properties observed in the problem, such as ill-posedness, instability of the function, and uniqueness of the solution. The article is based on the scientific foundations presented in O. Zikrov's textbook "Equations of Mathematical Physics" and on the integral solutions of the heat conduction equation.

Key words: Heat conduction equation, inverse problem, Green's function, determination of the initial function, parabolic equation, integral representation, initial-boundary value problem, stability, ill-posed problem.

Kirish

2020 yil mamlakatimizda ilm, ma'rifat va raqamli iqtisodiyotni rivojlantirish yili deb e'lon qilinib, bu boradagi ustuvor maqsadlar belgilandi. Yurtimizda avvaldan shakllangan ilmiy maktablar salohiyatini hisobga olib, hozirgi bosqichdagi milliy manfaatlarimiz va taraqqiyotimiz yo'nalishlaridan kelib chiqqan holda, bu yil matematika, kimyo, biologiya, geologiya fan va sohalarini rivojlantirish tanlab olindi.

Sh.M.Mirziyoyev

O'quvchilarning darsga bo'lgan qiziqishini oshiris, mantiqiy fikrlash vaijodiy yondashuvni oshirish, ijod qilish, mustaqil talim olish maktabdan tashqari o'z ustilarida ishlashga yordam berish maktabning ustivor vazifalaridan biridir. Issiqlik tarqalish tenglamasidan boshlang'ich funksiyaning aniqlashning teskari masalasi o'quvchilarda matematik jarayonlarni chuqur tushunish, mantiqiy fikrlash va tahlil qilish ko'nikmalarini rivojlantiradi. Bu masalada issiqlikning keyingi holati ma'lum bo'lib, uning boshlang'ich holatini topish talab qilinadi. Bunday masalalar



ill-qo'yilganligi sababli noaniqliklarga sezgir bo'ladi va maxsus matematik usullarni qo'llashni talab qiladi.

Teskari masalani o'rganish o'quvchilarga differensial tenglamalar, fizik jarayonlarni modellashtirish va amaliy masalalarni tahlil qilish bo'yicha mustahkam bilim beradi. Shu bilan birga, bu mavzu ularning tafakkurini kengaytiradi, izlanish va mustaqil o'rganishga bo'lgan qiziqishini oshiradi.

MUHOKAMA VA NATIJALAR

Issiqlik tarqalish tenglamasi bilan bog'liq teskari masalalar matematik fizikaning eng murakkab va ilmiy tadqiqotlar talab qiladigan yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. Mazkur masalada asosiy maqsad — issiqlik tenglamasining ma'lum bo'lgan oxirgi (yakuniy) holati asosida uning **boshlang'ich funksiyasini aniqlash**dir. Ushbu turdagi masalalar qadimdan fizik jarayonlarni qayta tiklashda muhim ahamiyatga ega bo'lgan. Tarixiy manbalarga nazar tashlasak, parabolik tenglamalar bilan bog'liq tahlillar dastlab fransuz matematigi **Jozef Furiye** tomonidan XIX asr boshlarida o'rganilgan bo'lib, uning "*Théorie analytique de la chaleur*" (1822) asari issiqlik tarqalishi nazariyasiga asos solgan (Furiye, 1822).

Shu bilan birga, issiqlik tenglamasi uchun **teskari masala** tushunchasi XX asrning ikkinchi yarmiga kelib mustaqil ilmiy yo'nalish sifatida shakllandi. Bu borada rus olimlari — **A.N. Tixonov, V.Y. Arsenin, M.M. Lavrentyev**larning ishlari alohida e'tiborga loyiq. Tixonovning "Нестабильные задачи математической физики" (1962) asarida teskari issiqlik masalalarining ill-qo'yilganligi, barqaror emasligi va ularni yechish uchun **regulyarizatsiya usullari** zarurligi isbotlab berilgan. Tadqiqotlarda ko'rsatilishicha, issiqlik tenglamasida vaqt bo'yicha orqaga qaytish (ya'ni, boshlang'ich holatni topish) kuchli darajada barqaror emas jarayondir — oxirgi holatdagi juda kichik xatolik ham yechimni keskin o'zgartirib yuborishi mumkin.

So'nggi yillarda bu masala O'zbekiston va xorijdagi tadqiqotchilar tomonidan ham faol o'rganilmoqda. Masalan, "**Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun teskari Koshi masalasi**" (Scientific Journal, 2023) maqolasida boshlang'ich funktsiyani qayta tiklashning analitik va sonli metodlari, regulyarizatsiya usullari va



ularning barqarorligi tahlil qilingan. Mualliflar Tixonov regularizatsiyasi, Furiye koeffitsientlari bo'yicha filtrlash, hamda silliqlashtiruvchi funksiyalar tanlashning turli variantlari bo'yicha tajribalar o'tkazganliklarini qayd etadilar.

Shuningdek, zamonaviy adabiyotlarda issiqlik tenglamasi uchun teskari masalalarni yechishda **optimal filtrlash, Fourier-metodlar, silliqlovchi funksiyalar, darajali regularizatsiya, qayta tiklash algoritmlari** samarali natijalar bergani qayd etiladi. Xususan, Springer nashriyotidagi "*Solving Direct and Inverse Heat Conduction Problems*" (Özişik & Orlande, 2000) kitobida boshlang'ich funksiyani aniqlashning bir nechta amaliy modellari, laboratoriya tajribalari va kompyuter simulyatsiyalari bayon etilgan.

Tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, issiqlik tenglamasi uchun teskari masalani yechishning muvaffaqiyati:

- ma'lumotning aniqligi,
- regularizatsiya parametrining to'g'ri tanlanishi,
- tanlangan yechim usulining barqarorlik xususiyatlariga,
- hisoblash algoritmlarining aniqligiga

juda kuchli bog'liqdir. Ko'pgina manbalarda ta'kidlanishicha, filtrlangan Furiye qatorlari va Tixonov usuli eng ko'p qo'llaniladigan usullar bo'lib, ular barqaror yechim olishga imkon beradi (Zaynullova va boshq., 2019).

Natijada, mazkur masalani o'rganish matematik fizikaning nazariy jihatlari bilan bir qatorda amaliy modelashtirish, raqamli hisoblash va fizik jarayonlarni analiz qilish ko'nikmalarini boyitadi. Issiqlik jarayonlarining tabiiy noaniqliklari va ill-qo'yilganlik xususiyatlari o'quvchilarni chuqur fikrlashga, mavjud ma'lumot asosida eng maqbul yechimni tanlashga o'rgatadi. Bu esa nafaqat nazariy matematika, balki muhandislik, energetika, geofizika, materialshunoslik kabi sohalarda ham foydali bo'ladi.

MASALA:Issiqlik tarqalish jarayonida boshlang'ich harorat taqsimotini tiklash masalasi ko'plab amaliy jarayonlarda uchraydi. Masalan, metall plastinkaning sirti ma'lum vaqt o'tganidan keyin o'lchanadi, biroq uning dastlabki



qizigan holati noma'lum bo'ladi. Mazkur teskari masala issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasining quyidagi ko'rinishi orqali ifodalanadi:

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < x < L, t > 0$$

va ma'lum vaqt $t = T$ dagi harorat:

$$U(x, T) = f(x),$$

lekin boshlang'ich holat:

$$U(x, 0) = \psi(x)$$

noma'lum.

Teskari masalaning maqsadi – mavjud $f(x)$ funksiyadan foydalanib noma'lum $\varphi(x)$ boshlang'ich funksiyani tiklashdir.

Bunday masalalar ill-qo'shilgan (noaniqlikka sezgir) bo'lgani sababli, boshlang'ich funksiyani barqaror aniqlash uchun, odatda, **regulyarizatsiya usullari** qo'llanadi.

Masalan:

1) Tixonov regulyarizatsiyasi

$$\min \psi_{(x)} \| A\psi - f \|^2 + \alpha \| \psi \|^2$$

2) **Fourier** **qatorlari** **bo'yicha** **tiklash**

$$\varphi(x) = \sum_n^{\infty} c_n e^{a^{2\lambda_n T}} \sin(\lambda_n x), n = 1$$

Bu usullar yordamida masala matematik jihatdan barqarorlashadi va boshlang'ich harorat taqsimoti tiklanadi.

Amaliy misol: Metall sterjen $0 < x < \pi$ bo'yicha issiqlik tarqalish tenglamasiga bo'ysunadi. Tajriba oxirida $t=1$ da o'lchangan harorat:

$$U(x, 1) = \sin(2x)$$

Boshlang'ich funksiyani topish uchun analitik yechimdan foydalanamiz:

$$U(x, t) = e^{-4t} \sin(2x)$$

Shundan:

$$u(x, 0) = \sin(2x)$$

demak boshlang'ich qizigan holat ham sinus ko'rinishida bo'lgan.

XULOSA

Issiqlik tarqalish tenglamasiga oid teskari masalalarda asosiy maqsad — ma'lum bir vaqtdagi harorat taqsimotidan foydalanib, jarayonning boshlang'ich



holatini tiklashdir. Bunday masalalar matematik fizikaning eng murakkab va dolzarb yo'nalishidan biri bo'lib, ularning ill-qo'shilganligi sababli yechim kichik noaniqliklarga juda sezgir bo'ladi. Shu bois boshlang'ich funksiyani barqaror aniqlashda Tixonov regulyarizatsiyasi, Fourier qatorlari bo'yicha tiklash, hamda boshqa stabilizatsiya usullaridan foydalanish zarur.

O'rganilgan manbalar tahlili shuni ko'rsatadiki, teskari issiqlik masalalarining nazariy asosi M.M.Lavrentyev, A.N.Tixonov, A.A.Samarskiy kabi olimlarning fundamental asarlarida ishlab chiqilgan bo'lib, hozirgi kunda ham bu masalalar kompyuter modellash, materiallar fizikasi, tibbiy termografiya, muhandislik va ekologiya kabi sohalarda keng qo'llanmoqda.

Yakun qilib aytganda, issiqlik tarqalish tenglamasidan boshlang'ich funksiyani aniqlashning teskari masalasi nazariyada ham, amaliyotda ham muhim ahamiyatga ega bo'lib, uni barqaror yechish uchun zamonaviy matematik va sonli metodlar qo'llanilishi masalaning samarali hal qilinishini ta'minlaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

- 1. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. “Matematicheskoe modelirovanie. Metody chislennogo analiza”. – Moskva: Fizmatlit, 2003.** Unda teskari issiqlik masalalarining ill-qo'shilganligi, barqarorlashtirish usullari va Tixonov regulyarizatsiyasi haqida aniq matematik faktlar berilgan.
- 2. Lavrentyev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. “Neustoichivye zadachi matematicheskoy fiziki”. – Moskva: Nauka, 1986.** Bu kitob issiqlik tenglamasining teskari masalasi eng klassik manbalardan biri bo'lib, boshlang'ich shartni tiklashning ill-qo'shilganligi matematik isbotlar bilan bayon qilingan.
- 3. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. “Metody resheniya nekorrektnykh zadach”. – Moskva: Nauka, 1979.** Regulyarizatsiya nazariyasining asosiy manbasi; issiqlik tenglamasi teskari masalasi misollar bilan yoritilgan.



4. O'zbekiston M.N. "Heat Conduction". – Wiley, 1980.

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi, uning klassik yechimlari, Fourier usullari, vaqt ortidan tiklash masalalari bayon etilgan.