ANALITIK QISMLARI N-DARAJALI KO'PHADLARDAN IBORAT BO'LGAN BIANALITIK FUNKSIYANING YAGONA KO'RINISHI. KVADRAT KO'PHADLI BIANALITIK INTERPOLYATSIYA MASALASI VA UNING YECHIMI

Tojiyev O.Y.

Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti,

Samarqand , Uzbekistan

Annotatsiya: Mazkur maqolada analitik qismlari m-darajali ko'phadlardan tashkil topgan bianalitik funksiyaning yagona ko'rinishini aniqlash , xususan , kvadrat ko'phadli bianalitik interpolyatsiya masalasi qaralgan. Bianalitik funksiyaning umumiy ko'rinishi $f(z) = \bar{z}G_1(z) + G_0(z)$ shaklida ifodalanib , uning analitik tarkibiy qismlari $G_1(z)$ va $G_0(z)$ kvadrat ko'phadlar orqali aniqlanishi ko'rsatildi. Berilgan uchta interpolyatsiya nuqtalari asosida analitik qismlarning koeffitsientlarini topish uchun Vandermonde tipidagi matritsaga asoslangan chiziqli tenglamalar sistemasi tuzildi va u Kramer usuli yordamida yechildi. Shuningdek , bianalitik funksiyaning ikkinchi tarkibiy qismi uchun yangi qiymatlar kiritilib , mos chiziqli sistema hosil qilindi va uning yechimi orqali umumiy funksiya tiklandi.Keltirilgan misol yordamida nazariy natijalar amaliy jihatdan tasdiqlandi hamda kvadrat ko'phadli bianalitik interpolyatsiya masalasining konstruktiv yechimi namoyish etildi.

Kalit so'zlar: Bianalitik funksiya , interpolyatsiya , Vandermonde matritsasi , Kramer usuli , analitik funksiya , chiziqli tenglamalar sistemasi.

ЕДИНСТВЕННЫЙ ВИД БИОНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ, АНАЛИТИЧЕСКИЕ КОМПОНЕНТЫ КОТОРОЙ ЯВЛЯЮТСЯ МНОГОЧЛЕНАМИ СТЕПЕНИ n. ЗАДАЧА КВАДРАТИЧНОЙ БИОНАЛИТИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ЕЁ РЕШЕНИЕ

Аннотация: В данной работе рассматривается задача определения единственного вида бионалитической функции, аналитические компоненты которой являются многочленами степени n; в частности, исследуется задача квадратичной бионалитической интерполяции. Общий вид бионалитической функции задаётся формулой $f(z) = \bar{z}G_1(z) + G_0(z)$, где её аналитические компоненты $G_1(z)$ и $G_0(z)$ представляются в виде квадратных многочленов. На основе трёх заданных узлов интерполяции строится система линейных уравнений с матрицей типа Вандермонда, коэффициенты которой определяются с помощью правило Крамера. Кроме того, для второй компоненты функции вводятся новые значения, формируется соответствующая система линейных уравнений и находится её решение. Полученные результаты подтверждаются на конкретном примере, что демонстрирует конструктивное решение задачи квадратичной бианалитической интерполяции.

Ключевые слова: Бианалитическая функция, интерполяция, матрица Вандермонда, правило Крамера, аналитическая функция, система линейных уравнений.

THE UNIQUE FORM OF A BIANALYTIC FUNCTION WHOSE ANALYTIC COMPONENTS ARE POLYNOMIALS OF DEGREE n . THE PROBLEM OF QUADRATIC POLYNOMIAL BIANALYTIC INTERPOLATION AND ITS SOLUTION

Abstract: In this paper, the problem of determining the unique form of a bianalytic function whose analytic components are polynomials of degree n is considered, in particular, the problem of quadratic polynomial bianalytic interpolation is studied. The general form of a bianalytic function is represented as $f(z) = \bar{z}G_1(z) + G_0(z)$, where its analytic components $G_1(z)$ and $G_0(z)$ are determined in the form of quadratic polynomials. Based on three given interpolation nodes, a system of linear equations with a Vandermonde-type matrix is constructed to determine the coefficients of the analytic parts, and the system is solved using Cramer's Rule.In addition, new values are introduced for the second component of the bianalytic function, and the corresponding linear system is formed. The obtained results are illustrated by a concrete example, which confirms the theoretical findings. As a result, a constructive solution to the problem of quadratic polynomial bianalytic interpolation is presented.

Key words: Bianalitic function , interpolation , quadratic polynomial , Vandermonde matrix , Cramer’s rule , analytic function , system of linear equations.

Kirish. Hozirgi kunda kompleks o’zgaruvchili funksiyalar nazariyasi matematikaning muhim va tez rivojlanayotgan yo’nalishlaridan biri hisoblanadi. Ayniqsa , analitik va bianalitik funksiyalarni o’rganish nafaqat nazariy jihatdan , balki , amaliy masalalarni yechishda ham katta ahamiyatga ega. Bianalitik funksiyalar kompleks tekislikda aniqlangan bo’lib , ular analitik va kon’yugat analitik qismlarning kombinatsiyasi sifatida ifodalanadi[1]. Interpolyatsiya masalalariga ko’ra , masalaning kichikroq sohada berilgan qiymatlariga qarab uni butun sohada tiklash ishlari kompleks analizning funksiyalarni analitik davom ettirish prinsipi bilan uzviy ravishda bog’lanadi va qaysidir manoda bir birga ekvivalent bo’la oladi[2].

Mavzuning dolzarbligi: Zamonaviy ilm-fan va texnologiyalarning rivojlanishi murakkab matematik modellarga bo’lgan ehtiyojni oshirmoqda. Bunday modellarda ko’pincha kompleks o’zgaruvchili funksiyalar ishtirok etadi. Shu nuqtai nazardan , bianalitik funksiyalarni o’rganish va ular uchun samarali interpolyatsiya usullarini ishlab chiqarish dolzarb masalalardan biridir.

Kvadrat ko’phadli bianalitik interpolyatsiya usulini ishlab bir tomondan nazariy jihatdan yangi natijalarni olish , ikkinchi tomondan amaliy hisoblashlarda sodda va qulay algoritmlarni taqdim etadi. Ushbu usul yordamida berilgan nuqtalar asosida bianalitik funksiyalarni aniq tiklash imkoniyati mavjud bo’lib , bu esa ilmiy va amaliy masalalarda muhim ahamiyat kasb etadi. Shuningdek , Vandermonde matritsasiga asoslangan yondashuv yechimning yagona mavjudligini ta’minlaydi[3] hamda hisob-kitob ishlarini aniq va barqaror qiladi. Shu nuqtai nazardan aytish mumkinki , mazkur mavzu kompleks analiz , sonlar nazariyasi va amaliy matematika kesishgan dolzarb ilmiy yo’nalishlardan biri hisoblanadi.

ASOSIY QISM: Analitik qismlari n −darajali ko’phadlardan iborat bo’lgan bianalitik funksiyaning yagona ko’rinishi

Matematik nuqtai nazardan n darajali ko’phadni aniqlash uchun $n+1$ ta nuqta zarur ekanligi ma’lum. Ushbu masaladagi bianalitik funksiya 2 ta mustqail analitik qismdan iborat bo’lgani uchun umumiy koeffitsientlar soni $2 \cdot (n+1)$ ga teng bo’ladi. Shu nuqtai nazardan bizga interpolyatsiya uchun $m = n+1$ ta nuqta kerak va har bir nuqtada 2 ta shart berilgan bo’lishi kerak va bu shartlarga ko’ra jami

$2m = 2(n+1)$ ta tenglma hosil bo’ladi:

Analitik qismlari n −darajali ko’phadlardan tashkil topgan bianalitik funksiyaning umumiy ko’rinishi quyidagicha:

$$f(z) = \bar{z}G_1(z) + G_0(z)$$

bo'lib , bunda :

$$G_1(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad va \quad G_0(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$$

Umumiy holda yuqorida ta’kidlangani kabi , funksiya analitik qismlarini topish uchun quyidagi asosiy ifodalar berilgan bo’lsin :

$Interpolyatsiya\ nuqtalari$: $\quad z_1, z_2, \dots, z_{n+1}\ (n+1\ ta\ nuqta)$

$Hosila\ qiymatlari(G_1\ uchun)$: $\quad G_1(z_j) = \omega_j, j = 1, \dots, n+1$

$Funksiya\ qiymatlari(G_0 uchun)$: $\quad f(z_j) = v_j, j = 1, \dots, n+1$

a) **$G_1(z)$ koeffitsientlarni topish $(a_0, a_1, \dots, a_n)$**

$G_1(z)$ funksiyasini aniqlash uchun $n+1$ ta tenglamalar sistemasini yechamiz:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z_j^k = \omega_j\ , \quad bu\ yerda\ , j = 1,2, \dots, n+1$$

Bu yerda $a_0, a_1, \dots a_n$ noma’lumlar uchun chiziqli tenglamalar sistemasidir.

Uning matritsa ko’rinishi $Va = W$. Bu yerda $V - (n+1)$ tartibli Vandermond matritsasi:

$$V=\begin{pmatrix}1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & z_2^n\\ 1 & z_{n+1} & z_{n+1}^2 & \cdots & z_{n+1}^n\end{pmatrix}$$

a koeffitsientlar uchun: $a=\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$. W hosila qiymatlari ustuni: $W=\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_{n+1}\end{pmatrix}$

Vandermonde matritsasining determinanti:

$$\det V=\prod_{1\le i<j\le n+1}(z_j-z_i)$$

bo'lib, z_j nuqtalar turli xil bo'lgani uchun $detV\neq 0$. Demak yechim yagonadir.

Har bir a_k koeffitsientni topish Kramer qoidasi bo'yicha quyidagicha aniqlanadi[4]:

$$a_k=\frac{detV_k}{detV}\quad,\ k=0,1,2,\dots,n$$

Bu yerda V_k-V matritsaning $k+1$ ustuni w ustuni bilan almashtirilgan matritsadir.

***b*) $G_0(z)$ koeffitsientlarni topish $(b_0,b_1,b_2,\dots)$**

$G_0(z)$ ni aniqlash uchun avval v_j qiymatlarni hisoblaymiz:

$$\partial_j=f(z_j)-\bar{z}_jG_1(z_j)=v_j-\bar{z}_jw_j\,,\qquad j=1,\dots,n+1$$

Endi $b_0,b_1,\dots,b_n$ koeffitsientlari uchun tenglamalar a_k uchun bo'lgan tenglamalar bilan bir xil tuzilishga ega, faqat W ni o'rniga ∂' ustuni ishlatiladi.

$$Vb=v'$$

Bu yerda:

$$b=\begin{pmatrix}b_0\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\ \ va\ \ v'=\begin{pmatrix}v'\\ \vdots\\ v'_{n+1}\end{pmatrix}$$

a banddagi kabi har bir b_k koeffitsient uchun :

$$b_k=\frac{detV_k'}{detV},k=0,\dots n$$

tenglik o'rinli . Bunda $V_k'-V$ matrirsaning $k+1-$ ustuni V' ustuni bilan almashtirilgan matritsadir. Yuqoridagi koeffitsientlar aniqlangandan so'ng , yakuniy yagona yechim:

$$f(z)=\bar{z}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kz^k\right)+\left(\sum_{k=0}^{n}b_kz^k\right)$$

Bu yerda a_k vz b_k koeffitsientlar yuqoridagi $n+1$ tartibli Vandermonde sistemalari orqali yagona tarzda aniqlanadi.

Eslatma: Bu formula $n=1$ (chiziqli) $n=2$(kvadrat) va yuqori darajalar uchun umumiy bo'lib har bir holatda faqat mos tartibli matritsa ustunlari (masalan $n=2$ da

3 ta ustun) yechiladi. Quyida biz kvadrat ko'phadli bianalitik interpolyatsiya va uning umumiy yechimini ko'rib chiqamiz. Xususiy hol uchun: Funksiyaning umumiy ko'rinishi : $f(z) = \bar{z} \cdot G_1(z) + G_0(z)$. Interpolyatsiya nuqtalari $z_1, z_2\ va\ z_3$ bo'lganda analitik qismlar $G_1(z)$ va $G_0(z)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{cases} G_1(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0 \\ G_0(z) = b_2z^2 + b_1z + b_0 \end{cases}$$

Berilgan nuqtalardagi qiymatlar $z_k\ nuqtalar\ uchun$:

$$G_1(z_k) = f_{\bar{z}}(z_k) = w_k \ ; \ f(z_k) = v_k$$

Yechimlarni quyidagicha izlaymiz:

1-qadam: $G_1(z)$ analitik qismni tiklash (Matritsaviy yechim) :

$G_1(z)$ uchun shart: $G_1(z_k) = w_k\ (3\ ta\ tenglama)$

$$\begin{cases} a_2z_1^2 + a_1z_1 + a_0 = w_1 \\ a_2z_2^2 + a_1z_2 + a_0 = w_2 \\ a_2z_3^2 + a_1z_3 + a_0 = w_3 \end{cases}$$

Bu $a_0, a_1\ va\ a_2$ nomalumlar uchun chiziqli tenglamalar sistemasidir. Uning matritsa ko'rinishi:

$$\begin{pmatrix} z_1^2 & z_1 & 1 \\ z_2^2 & z_2 & 1 \\ z_3^2 & z_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Bu matritsa Vandermonde matritsasining transpozitsiyasi bo'lib z_1, z_2, z_3 har xil bo'lgani uchun determinanti $\det V \neq 0$ bo'ladi. Shuning uchun yechim yagona va Kramer usuli orqali topiladi[4]. $G_1(z)$ uchun koeffitsient formulalari:

$$a_0 = \frac{\det V_0}{\det V} \quad ; \quad a_1 = \frac{\det V_1}{\det V} \quad ; \ a_2 = \frac{\det V_2}{\det V}$$

Bu yerda V matritsasi:

$$V = \begin{pmatrix} z_1^2 & z_1 & 1 \\ z_2^2 & z_2 & 1 \\ z_3^2 & z_3 & 1 \end{pmatrix}$$

va V_k esa V matritsaning k −ustuni $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ ustuni bilan almashtirilgan matritsadir.

2-qadam: $G_0(z)$ koeffitsientlarni topish:

$G_0(z)$ uchun shart : $G_0(z_k) = f(z_k) - \bar{z}_kG_1(z_k)$. Yuqoridagi ma'lumotlar asosida $G_0(z)$ uchun yangi qiymatlar $v_k' = v_k - \bar{z}_kw_k$, $k = 1,2,3$

Shunday qilib $G_0(z)$ koeffitsientlari b_0, b_1, b_2 ham yuqoridagi Vandermonde matritsasiga o'xshashlik orqali topiladi:

$$\begin{cases} b_2 z_1^2 + b_1 z_1 + b_0 = \nu_1{}' \\ b_2 z_2^2 + b_1 z_2 + b_0 = \nu_2{}' \\ b_2 z_3^2 + b_1 z_3 + b_0 = \nu_3{}' \end{cases}$$

$G_0(z)$ uchun koeffitsientlarni topish formulalari:

$$b_0 = \frac{\det V_0{}'}{\det V} \quad ; \quad b_1 = \frac{\det V_1{}'}{\det V} \quad ; \quad b_2 = \frac{\det V_2{}'}{\det V}$$

bu yerda $V_k{}'$ esa V matritsaning k –ustuni $\begin{pmatrix} \nu_1{}' \\ \nu_2{}' \\ \nu_3{}' \end{pmatrix}$ ustuni bilan almashtirilgan matritsadir.

Umumiy yakuniy yagona yechim: Kvadrat ko'phadli bianalitik funksiyaning umumiy yagona ko'rinishi $f(z) = \bar{z} \cdot G_1(z) + G_0(z)$ bo'lib , bu yerda $G_1(z)$ va $G_0(z)$ yuqoridagi Vandermonde sistemalari orqali z_k , w_k , ν_k ma'lumotlariga bog'liq bo'lgan a_k , b_k koeffitsientlari bilan aniqlanadi.

1-Misol: Quyidagi uchta nuqtada berilgan qiymatlar asosida kvadrat ko'phadli bianalitik interpolyatsiya funksiyasini tuzing:

$$z_1 = 0\,, \quad z_2 = 1\,, \quad z_3 = 2$$

$$G_1(z_k) = w_k : \quad w_1 = 1, \quad w_2 = 2\,, \quad w_3 = 5$$

$$f(z_k) = \nu_k : \quad \nu_1 = 1\,, \quad \nu_2 = 3\,, \quad \nu_3 = 7$$

Yechish: 1-qadam: Yuqorida berilgan nuqtalarga qarab Vandermonde matritsasini tuzib olamiz:

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \;,\; A = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \;,\; W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\det V = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

a_2 uchun :

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\,, a_2 = \frac{\det V_2}{\det V} = \frac{-2}{-2} = 1$$

a_1 uchun :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det V_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0\,, a_1 = \frac{\det V_1}{\det V} = \frac{0}{-2} = 0$$

a_0 uchun :

$$V_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \det V_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -2\,, a_0 = \frac{\det V_0}{\det V} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Bu tengliklardan $G_1(z) = z^2 + 1$ ekanligini topamiz.

2-qadam: $G_0(z)$ ni Kramer usulida quyidagicha aniqlaymiz:

$$v_1' = 1 \ , \ v_2' = 1 \ , \ v_3' = -3$$

Asosiy matritsa ushbu holatda ham yuqoridagi asosiy matritsa bilan bir xil:

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b_2 uchun:

$$V_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} , \det V_2' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \ , b_2 = \frac{\det V_2'}{\det V} = \frac{4}{-2} = -2$$

b_1 uchun:

$$V_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} , \det V_1' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \ , b_1 = \frac{\det V_1'}{\det V} = \frac{-4}{-2} = 2$$

b_0 uchun:

$$V_0' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} , \det V_0' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -2 \ , b_0 = \frac{\det V_0'}{\det V} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Bu tengliklardan $G_0(z) = -2z^2 + 2z + 1$ ekanligini topamiz.

$G_0(z)$ va $G_1(z)$ funksiyalarni $f(z) = \bar{z} \cdot G_1(z) + G_0(z)$ formulaga qo'yadigan bo'lsak , yakuniy yagona kvadrat ko'phadli bianalitik funksiya quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$f(z) = \bar{z} \cdot (z^2 + 1) + (-2z^2 + 2z + 1)$$

Xulosa: Mazkur ishda analitik qismlari n −darajali ko'phadlardan tashkil topgan bianalitik funksiyaning yagona ko'rinishi va xususiy holda kvadrat ko'phadli bianalitik interpolyatsiya masalasi o'rganildi va berilgan uchta nuqta asosida bianalitik funksiyani tiklash usuli ishlab chiqildi. Bianalitik funksiyaning umumiy ko'rinishi $f(z) = \bar{z}G_1(z) + G_0(z)$ orqali ifodalanib uning analitik qismlari alohida-alohida aniqlanishi ko'rsatildi. Ish jarayonida $G_1(z)$ va $G_0(z)$ funksiyalarning koeffitsientlarini topish uchun Vandermonde tipidagi matritsaga asoslangan chiziqli tenglamalar sistemasi tuzildi va u Kramer usulida yechildi. Natijada berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi yagona bianalitik interpolyatsiya funksiyasi mavjudligi va aniqligi isbotlab berildi. Shuningdek , keltirilgan misol orqali nazariy natijalar amaliy jihatdan tasdiqlandi. Bir so'z bilan aytganda ushbu ishda kvadrat hol uchun bianalitik interpolyatsiya masalasining konstruktiv yechimi taklif etildi.

Adabiyotlar/ Литература / References

1. И. А. Бикчантаев, Об одной внутренней теореме единственности для линейного эллиптического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Известия вузов. Математика 2015, №5, с. 17–21

2. И. А. Бикчантаев, Теорема единственности для линейного

эллиптического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Известия вузов. Математика 2017, №7, с. 14–18

3. Charles Hermite-,,Sur la formule d'interpolation'' // Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal). — 1878. — Bd. 84. — S. 70–79

4. John.B Garnet-Bounded analytic functions.-New York: Academic Press,1981.-467 p.

5. Lars Ahlfors- Complex analysis.-3rd ed.-New York: McGraw-Hill , 1979.-331 p.