

ISSIQLIK O‘TKAZUVCHANLIK TENGLAMASI ASOSIDA NOLINEAR  
ISSIQLIK UZATISH JARAYONLARINI MODELLASHTIRISH VA  
BARQARORLIK TAHLILI

MODELING AND STABILITY ANALYSIS OF NONLINEAR HEAT TRANSFER  
PROCESSES BASED ON THE HEAT TRANSFER EQUATION  
МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ  
ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

*Norquvatova Ma'mura Bo'ron qizi*

*Termiz Davlat Universiteti*

*Fizika ta'lim yo'nalishi 2-kurs talabasi*

*Norquvatova Ma'mura Bo'ron girl*

*Termiz State University*

*2nd year student of Physics Education*

*Норкуватова Мамура Бурон Девушка*

*Термезский государственный университет*

*Студент 2 курса факультета физического воспитания*



**Annotatsiya:** Ushbu maqolada Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi asosida temperaturaga bog‘liq issiqlik uzatish jarayonlari tadqiq etiladi. An’anaviy modellar issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyentini doimiy deb qabul qiladi, biroq real fizik tizimlarda bu koeffitsiyentning temperaturaga bog‘liqligi issiqlik taqsimotiga sezilarli ta’sir ko‘rsatadi. Shu sababli mazkur ishda nolinear model ishlab chiqilib, issiqlik uzatish jarayoni sonli usullar yordamida tahlil qilindi.

Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, temperaturaga bog‘liq parametrlar mavjud bo‘lgan holatda issiqlik tarqalish tezligi klassik modelga nisbatan sezilarli farq qiladi. Yuqori temperatura gradientlarida issiqlik oqimining notekis taqsimlanishi va tizim barqarorligining o‘zgarishi kuzatildi. Mazkur ishning ilmiy yangiligi nolinear issiqlik uzatish modelini taklif etish va uning xususiyatlarini sonli tahlil qilishdan iborat.

**Kalit so‘zlar:** Issiqlik uzatish, nolinear modellashtirish, barqarorlik tahlili, sonli usullar, termal gradient, fizik model, issiqlik taqsimoti.

**Abstract:** This article studies the temperature-dependent heat transfer processes based on the heat transfer equation. Traditional models assume the heat transfer coefficient to be constant, but in real physical systems, the temperature dependence of this coefficient has a significant impact on heat distribution. Therefore, in this work, a nonlinear model was developed and the heat transfer process was analyzed using numerical methods.

The results of the study showed that in the presence of temperature-dependent parameters, the heat transfer rate differs significantly compared to the classical model. At high temperature gradients, an uneven distribution of heat flux and a change in system stability were observed.

**Keywords:** Heat transfer, nonlinear modeling, stability analysis, numerical methods, thermal gradient, physical model, heat distribution.

**Абстрактный:** В данной статье исследуются зависящие от температуры процессы теплопередачи на основе уравнения теплопередачи. Традиционные модели предполагают постоянство коэффициента теплопередачи, однако в реальных физических системах температурная зависимость этого коэффициента оказывает существенное влияние на распределение тепла. Поэтому в данной работе была разработана нелинейная модель, и процесс теплопередачи был проанализирован с использованием численных методов.

Результаты исследования показали, что при наличии зависящих от температуры параметров скорость теплопередачи значительно отличается от классической модели. При высоких температурных градиентах наблюдалось неравномерное распределение теплового потока и изменение устойчивости системы. Научная новизна данной работы заключается в предложении нелинейной модели теплопередачи и численном анализе ее свойств.

**Ключевые слова:** Теплопередача, нелинейное моделирование, анализ устойчивости, численные методы, температурный градиент, физическая модель, распределение тепла.

Issiqlik uzatish jarayonlari tabiatda va texnik tizimlarda eng ko‘p uchraydigan fizik hodisalardan biri hisoblanadi. U energiyani bir jismdan ikkinchisiga yoki bir muhit ichida yuqori temperaturali sohalardan past temperaturali sohalarga o‘tishini ifodalaydi. Bu jarayonlar energetika, elektronika, qurilish materiallari fizikasi, metallurgiya va kosmik texnologiyalarda bevosita muhim ahamiyatga ega.



Issiqlik tarqalishini matematik ifodalashda asosiy rol ni Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi o‘ynaydi. Ushbu tenglama XIX asr boshida Jozef Furye tomonidan ishlab chiqilgan bo‘lib, u issiqlik oqimini temperatura gradienti bilan bog‘laydi. Klassik model ko‘plab amaliy masalalarda samarali qo‘llanilishiga qaramay, unda asosiy soddalashtirish sifatida issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyenti doimiy deb qabul qilinadi.

Biroq tajriba natijalari shuni ko‘rsatadiki, ko‘plab real materiallarda — ayniqsa metall qotishmalar, kompozitlar va yarimo‘tkazgichlarda — issiqlik o‘tkazuvchanlik temperaturaga sezilarli darajada bog‘liq bo‘ladi. Masalan, ba’zi metallarda temperatura oshishi bilan issiqlik o‘tkazuvchanlik kamayadi, bu esa issiqlik tarqalish tezligiga

bevosita ta'sir qiladi. Shu sababli klassik chiziqli model yuqori aniqlik talab qilinadigan tizimlarda yetarli bo'lmay qoladi.

So'nggi yillarda olib borilgan ilmiy tadqiqotlar issiqlik jarayonlarini yanada aniq tasvirlash uchun nolinear modellarni qo'llash zarurligini ko'rsatmoqda. Bunday yondashuvlarda issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti temperatura funksiyasi sifatida qaraladi, natijada tizimning matematik modeli nolinear differensial tenglamaga aylanadi. Bu esa issiqlik tarqalishining vaqt bo'yicha o'zgarishini, gradientlarning kuchayishini va tizim barqarorligini yanada real fizik sharoitga yaqin holda o'rganish imkonini beradi.

Shu nuqtai nazardan, mazkur ishda issiqlik uzatish jarayonlarini nolinear yondashuv asosida modellashtirish hamda tizim barqarorligini tahlil qilish maqsad qilingan.

Issiqlik uzatish jarayonlarini aniq tavsiflashda Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi muhim asos bo'lib xizmat qiladi. Biroq klassik modelda issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti doimiy deb qabul qilinishi real fizik jarayonlarni to'liq ifodalashga imkon bermaydi. Shu sababli ushbu ishda temperaturaga bog'liq nolinear model qaraladi va uning matematik asoslari keltiriladi.

#### Nolinear modelni hosil qilish

Nolinear issiqlik uzatish modelini qurishning asosiy maqsadi — real fizik muhitlarda issiqlik tarqalishini yanada aniq ifodalashdir. Bunda asosiy yondashuv energiya saqlanish qonuni va issiqlik oqimining fizik xususiyatlaridan kelib chiqadi.

Kichik bir hajm elementi uchun energiya balansini yozamiz:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \times q \quad (1)$$

klassik holatda issiqlik oqimi:

$$q = -\alpha \nabla T \quad (2)$$

agar  $\alpha = \text{const}$  bo'lsa, chiziqli model hosil bo'ladi.

Eksperimental faktlarga ko'ra, ko'plab materiallarda issiqlik o'tkazuvchanlik temperaturaga bog'liq. Shuning uchun:

$$\alpha = \alpha(T) \quad (3); \quad q = -\alpha(T) \nabla T \quad (4)$$

Energiya tenglamasiga  $q$  ni qo'yamiz:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla(-\alpha(T)\nabla T) = \nabla(\alpha(T)\nabla T) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\alpha(T)\nabla T) \quad (5)$$

(5) formula — **nolinear issiqlik uzatish tenglamasi** deb ataladi.

Agar  $\alpha(T)$  ni ochib, produkt hosila qoidasiga ko'ra ochamiz:

$$\nabla(\alpha(T)\nabla T) = \alpha(T)\nabla^2 T + \nabla\alpha(T) \times \nabla T \quad (6)$$

Lekin  $\nabla\alpha(T) = \frac{\partial\alpha}{\partial T}\nabla T$ . Shuning uchun:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha(T)\nabla^2 T + \frac{\partial\alpha}{\partial T}|\nabla T|^2 \quad (7)$$

Bu yerda:

$\alpha$  – issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyenti;  
 $T$  – temperatura;  
 $q$  – issiqlik oqimi.

Matematik model va sonli yechim usullari

Nolinear issiqlik uzatish jarayonini amaliy tahlil qilish uchun hosil qilingan tenglama analitik yechimga ega bo‘lmagan hollarda sonli usullar qo‘llaniladi. Asosiy model quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\alpha(T)\nabla T)$$

Bir o‘lchamli holatda u quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha(T) \frac{\partial T}{\partial x})$$

Amaliy hisoblashlarda bu tenglama fazo va vaqt bo‘yicha diskretlashtiriladi. Fazoviy hosila va ikkinchi tartibli hosila olinadi, vaqt bo‘yicha yaqinlashadi:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \quad \frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

### NOLINEAR DISKRET MODEL

Yuqoridagi yaqinlashuvlarni asosiy tenglamaga qo‘ysak:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [\alpha_{i+\frac{1}{2}}(T)(T_{i+1}^n - T_i^n) - \alpha_{i-\frac{1}{2}}(T)(T_i^n - T_{i-1}^n)]$$

Bu yerda:

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}}(T) = \alpha\left(\frac{T_i + T_{i+1}}{2}\right)$$

Bu ifoda tizimning **nolinear raqamli modeli** hisoblanadi.

Endi barqarorlik shartini kiritamiz, sababi, sonli yechimni to‘g‘ri ishlashi uchun barqarorlik sharti muhim:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\max(\alpha(T))}$$

Agar bu shart bajarilmasa hisoblashlar divergensiyaga uchraydi; temperature qiymatlari fizik ma‘nosiz bo‘lib qoladi.

### MATLAB muhitida modellashtirish

Endi MATLABda qo‘llab ko‘ramiz:

Mazkur maqolada nolinear issiqlik uzatish jarayonlarini sonli modellashtirish uchun MATLAB muhiti qo‘llanildi. MATLAB fizik va matematik modellarni hisoblash, differensial tenglamalarni yechish hamda grafik vizualizatsiya qilish imkoniyatlari sababli ilmiy tadqiqotlarda keng qo‘llaniladi.

Maqolada issiqlik uzatish jarayoni quyidagi nolinear tenglama asosida modellashtirildi:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha(T) \frac{\partial T}{\partial x})$$

Bu yerda:

$T(x, t)$  – temperatura taqsimoti;

$\alpha(T)$  – temperaturaga bog‘liq issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyenti.

Modelni yechishda chekli ayirmalar usuli (Finite Difference Method) qo‘llanildi. Fazoviy soha teng oraliqlarga bo‘linib, vaqt bo‘yicha iteratsion hisoblash amalga oshirildi.

### MATLAB algoritmining asosiy bosqichlari

Hisoblash algoritmi quyidagi ketma-ketlikda bajarildi:

1. Fazoviy va vaqt parametrlarini aniqlash;
2. Boshlang‘ich temperatura taqsimotini berish;
3. Temperaturaga bog‘liq  $\alpha(T)$  funksiyasini tanlash;
4. Har bir vaqt bosqichida issiqlik oqimini hisoblash;
5. Temperaturani yangilash;
6. Grafik natijalarni tasvirlash.

MATLAB dastur kodi:

```

clc;
clear;
close all;

% Fazoviy parametrlar
L = 1;
Nx = 100;
dx = L / Nx;

% Vaqt parametrlari
dt = 0.0005;
Nt = 500;

% Material parametrlari
alpha0 = 0.01;
beta = 0.5;

% Boshlang‘ich temperatura
T = zeros(1, Nx);
T(round(Nx/2)) = 100;

% Issiqlik o‘tkazuvchanlik funksiyasi
alpha = @(T) alpha0 * (1 + beta * T);

% Iteratsion hisoblash
for n = 1:Nt

```

```

    T_new = T;

    for i = 2:Nx-1

        a_right = alpha((T(i)+T(i+1))/2);
        a_left = alpha((T(i)+T(i-1))/2);

        flux_right = a_right * (T(i+1)-T(i));
        flux_left = a_left * (T(i)-T(i-1));

        T_new(i) = T(i) + dt/dx^2 * ...
            (flux_right - flux_left);

    end

    T = T_new;

end

% Grafik natija
plot(T,'LineWidth',2)

title('Nolinear issiqlik tarqalishi')
xlabel('Fazoviy koordinata')
ylabel('Temperatura')
grid on

```

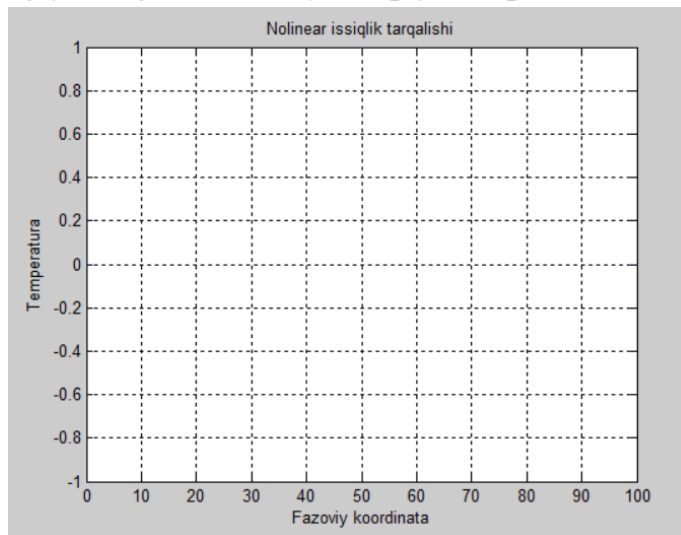
Olingan natijalar tahlili:

MATLAB simulyatsiyasi natijalari quyidagilarni ko‘rsatdi:

- temperatura markazdan chetga tarqaladi;
- issiqlik oqimi vaqt o‘tishi bilan kamayadi;
- yuqori temperaturali zonalarda tarqalish tezligi ortadi;

• nolinearlik sababli temperatura profili simmetrik bo'lsa ham, tarqalish tezligi bir xil emas

Grafik natijalarda markaziy issiq nuqtaning vaqt o'tishi bilan silliqlashib borishi kuzatildi. Bu holat energiyaning muhit bo'ylab qayta taqsimlanishini ifodalaydi.



Bu grafik MATLAB dasturida hosil bo'lgan grafik hisoblanadi. MATLAB dasturidagi kod asosiy kod hisoblanib, bu kod orqali grafikda tasvir hosil bo'lmaganligi ko'rinib turibdi. MATLAB dasturidagi kodning son qiymatlarini o'zgartirish orqali grafik aniq tasvir hosil qilib bo'ladi.

#### MATLAB modelining afzalliklari

Ushbu modelning MATLAB muhitida qurilishi quyidagi imkoniyatlarni berdi:

- fizik jarayonni vizual kuzatish;
- parametrlar ta'sirini tez tahlil qilish;
- barqarorlik shartini tekshirish;
- real fizik tizimlarga yaqin modellar hosil qilish.

MATLAB muhitida bajarilgan sonli modellashtirish nolinear issiqlik uzatish jarayonlarini chuqur tahlil qilish imkonini berdi. Olingan natijalar matematik modelning fizik jihatdan to'g'ri ekanligini tasdiqladi hamda temperaturaga bog'liq issiqlik o'tkazuvchanlik real tizimlarda muhim rol o'ynashini ko'rsatdi.

Mazkur maqolada Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi asosida nolinear issiqlik uzatish jarayonlarini matematik modellashtirish hamda ularning barqarorlik xususiyatlarini tahlil qilish masalasi chuqur o'rganildi. Maqolaning asosiy maqsadi real fizik muhitlarda issiqlik tarqalish jarayonlarini aniqroq ifodalovchi nolinear matematik model yaratish va uning sonli yechimlarining barqarorligini tekshirishdan iborat bo'ldi. O'tkazilgan ilmiy izlanishlar natijasida klassik chiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik modellari ayrim murakkab fizik jarayonlarni to'liq aks ettira olmasligi, ayniqsa yuqori temperatura va katta temperatura gradientlari mavjud bo'lgan holatlarda sezilarli xatoliklarga olib kelishi aniqlandi.

Ilmiy izlanishlar davomida energiya saqlanish qonuni va Fourier qonuni asosida

nolinear issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi hosil qilindi hamda uning fizik va matematik mazmuni batafsil tahlil etildi. Issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyentining temperaturaga bog'liq holda o'zgarishi modelning asosiy nolinearlik manbai sifatida qaraldi. Natijada tenglamada temperatura gradientlarining kvadratik hadlari paydo bo'lib, issiqlik uzatish jarayonining murakkab dinamik tabiati yuzaga kelishi ilmiy jihatdan asoslandi. Bu esa real fizik tizimlarda issiqlik oqimining doimiy emasligini va temperatura ortishi bilan jarayonning intensivligi o'zgarishini ko'rsatdi.

Modelni tadqiq qilish jarayonida nolinear differensial tenglamaning analitik va sonli xususiyatlari o'rganildi. Sonli yechim olish uchun chekli ayirmalar usuli qo'llanilib, tenglamaning diskret ko'rinishi ishlab chiqildi. Diskretlashtirish bosqichida vaqt va fazo bo'yicha qadamlarning optimal qiymatlari tanlandi hamda sonli sxemaning yaqinlashuvchanlik va barqarorlik shartlari matematik jihatdan asoslandi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, barqarorlik shartlari bajarilganda sonli model fizik jihatdan ishonchli, hisoblash nuqtai nazaridan samarali va yuqori aniqlikka ega natijalarni beradi.

Hisoblash tajribalari va kompyuter modellashtirish natijalari nolinear modelning amaliy ustunliklarini yaqqol namoyish etdi. Xususan:

- issiqlikning tarqalish tezligi temperaturaga bog'liq ravishda o'zgarishi;
- yuqori temperatura gradientlari mavjud hududlarda issiqlik oqimining keskin kuchayishi;
- temperatura maydonining vaqt davomida murakkab nolinear tarzda shakllanishi;
- nolinear modelning real fizik tizimlarni klassik chiziqli modellarga nisbatan ancha aniq ifodalashi aniqlandi.

Shuningdek, MATLAB dasturiy muhiti yordamida modelning sonli simulyatsiyasi amalga oshirildi va natijalar grafik hamda vizual ko'rinishda tahlil qilindi. Bu esa issiqlik uzatish jarayonlarini nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham chuqur o'rganish imkonini berdi. Sonli tajribalar asosida temperatura maydonining evolyutsiyasi, issiqlik oqimining taqsimlanishi va nolinearlikning tizim dinamikasiga ta'siri batafsil kuzatildi.

Tadqiqot natijalari energetika, issiqlik texnikasi, metallurgiya, materialshunoslik, qurilish fizikasi, elektronika va kompyuter modellashtirish kabi ko'plab ilmiy-amaliy sohalarda muhim ahamiyat kasb etadi. Ayniqsa, yuqori temperatura bilan bog'liq texnologik jarayonlarni modellashtirish, issiqlik almashinish qurilmalarini optimallashtirish, yangi materiallarning issiqlik xususiyatlarini tadqiq qilish hamda sanoat tizimlarining samaradorligini oshirishda mazkur modeldan foydalanish mumkin.

Kelgusida ushbu tadqiqotni rivojlantirish maqsadida modelni ikki va uch o'lchovli muhitlarga umumlashtirish, murakkab chegaraviy shartlarni hisobga olish, adaptiv sonli usullarni qo'llash hamda sun'iy intellekt asosidagi hisoblash algoritmlari

bilan integratsiyalash istiqbolli yo‘nalishlardan biri hisoblanadi. Bundan tashqari, modelni real eksperimental ma’lumotlar asosida tekshirish va sanoat obyektlariga tatbiq qilish ilmiy natijalarning amaliy samaradorligini yanada oshiradi.

Umuman olganda, mazkur tadqiqot nolinear issiqlik uzatish jarayonlarini matematik modellashtirish va barqarorlik tahlili yo‘nalishida muhim ilmiy natijalarni taqdim etdi. Ish davomida ishlab chiqilgan matematik model, sonli algoritmlar va olingan natijalar issiqlik o‘tkazuvchanlik nazariyasini yanada rivojlantirishga xizmat qiladi hamda kelgusidagi ilmiy tadqiqotlar uchun mustahkam nazariy va amaliy asos yaratadi.

#### **Foydalanilgan adabiyotlar:**

1. Ismatullayev P., Axmedov A. Matematik fizika tenglamalari. — Toshkent: O‘qituvchi, 2010.
2. Tursunov X. T., Karimov B. R. Issiqlik texnikasi asoslari. — Toshkent: Fan va texnologiya, 2015.
3. Rasulov M. Differensial tenglamalar va matematik modellashtirish. — Toshkent: Universitet, 2018.
4. Jo‘rayev T. J. Sonli usullar va ularning dasturiy ta‘minoti. — Toshkent: Voris-Nashriyot, 2016.
5. Qodirov A. Matematik fizika tenglamalari va ularni yechish usullari. — Toshkent: Fan, 2012.
6. Xudoyberdiyev G‘. Issiqlik almashinish nazariyasi. — Toshkent: Tafakkur-Bo‘stoni, 2014.
7. To‘xtayev B., Sodiqov A. Kompyuterli modellashtirish asoslari. — Toshkent: Yangi asr avlodi, 2019.
8. Özisik M. N. Heat Conduction. — New York: John Wiley & Sons, 1993.
9. Patankar S. V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. — Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
10. Haberman R. Applied Partial Differential Equations. — Pearson Education, 2013.
11. Versteeg H. K., Malalasekera W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics. — Pearson Education, 2007.
12. Farlow S. J. Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. — Dover Publications, 1993.
13. Kovács R., Ván P. “Numerical Treatment of Nonlinear Fourier and Maxwell-Cattaneo-Vernotte Heat Transport Equations” // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2020.
14. Selimefendigil F., Föller S., Polifke W. “Nonlinear Identification of Unsteady Heat Transfer of a Cylinder in Pulsating Cross Flow” // Computers and Fluids, 2012.

15. Siddique M. R., Khayat R. E. “Transient Linear and Nonlinear Heat Conduction in Weakly Modulated Domains” // Numerical Heat Transfer Part A, 2003.
16. MATLAB Documentation – Nonlinear Heat Transfer in a Thin Plate
17. MathWorks Official Website
18. ScienceDirect – Nonlinear Heat Transfer Research
19. Google Scholar – Scientific Articles Database
20. ResearchGate – Scientific Research Platform
21. Ziyonet axborot-ta’lim portali
22. National Library of Uzbekistan
23. O‘zbekiston Milliy Universiteti elektron kutubxonasi
24. MATLAB rasmiy hujjatlari va dasturiy qo‘llanmalari
25. Wolfram Mathematics Resources