

CHEGARALANMAGAN VA YARIM CHEGARALANGAN SOHALARDA BERILGAN TOR TEBRANISH TENGLAMALARI UCHUN QO'YILGAN MASALALARNING GEOMETRIK TALQINI

Xayriyeva Dilara Zaripovna

Buxoro Xalqaro Osyo Universiteti

Ijtimoiy fanlar va texnika fakulteti talabasi

Annotatsiya: Ushbu maqolada cheksiz va yarim cheksiz sohalarda tor tebranish tenglamasi uchun Koshi va aralash masalalarning Dalamber usulida yechilishi o'rganilgan. Maqolaning asosiy mohiyati — matematik yechimlarni fazoviy-vaqtinchalik grafiklar yordamida geometrik talqin qilishdan iborat. Tadqiqot davomida to'liqlarning tarqalish tezligi, aniqlanish va ta'sirlar sohalarining shakllanishi hamda to'liqlarning chegaradan qaytish (yansish) qonuniyatlari tahlil qilingan. Chegaraviy shartlarni ta'minlash uchun funksiyalarni manfiy sohaga toq va juft davom ettirish prinsiplari aniq ko'rsatib berilgan.

Kalit so'zlar: Tor tebranishi, Koshi masalasi, Dalamber usuli, xarakteristikalar, to'liq aks etishi, toq va juft davom ettirish.

Xususiy hosilali differensial tenglamalar, xususan, matematik fizika tenglamalari fani doirasida giperbolik turdagi tenglamalarni tadqiq etish fundamental va amaliy jihatdan eng ustuvor yo'nalishlardan biri hisoblanadi. Matematik fizika sohasida to'liqlarning tarqalishi, akustik tebranishlar, seysmik dalvalar va elektrodinamika jarayonlarini modellashtirishda giperbolik tenglamalar, xususan, bir o'lchovli tor tebranish tenglamasi asosiy baza vazifasini o'taydi. Ushbu tenglama o'zining sodda ko'rinishiga qaramasdan, tabiatdagi murakkab to'liqlanish va energiya ko'chishi jarayonlarini o'zida to'liq aks ettira oladi. Chegaralanmagan va turli chegaraviy shartlarga ega bo'lgan yarim chegaralangan sohalarda tebranish jarayonlarini o'rganishda xarakteristikalar usuli, ya'ni klassik Dalamber usuli eng samarali, sinalgan va intuitiv jihatdan tushunarli matematik apparatdir. Ushbu usulning o'ziga xosligi shundaki, u nafaqat differensial tenglamaning sof analitik yechimini aniq analitik funksiyalar ko'rinishida topishga imkon beradi, baki olingan natijalarni fazoviy-vaqtinchalik diagrammalarda to'liqlarning tarqalishi, to'qnashishi, bir-biri ustiga ustma-ust tushishi (superpozitsiyasi) va chegaradan qaytishi (aks etishi) ko'rinishida mukammal geometrik talqin qilishga yo'l ochadi. Bu esa o'z navbatida matematik simvollaridan iborat formulalar ortida yashiringan real fizik jarayonni ko'z oldimizga keltirishga yordam beradi.

Dastlab, cheksiz to'g'ri chiziqda, ya'ni hech qanday chekka nuqtalarsiz, minus cheksizlikdan plyus cheksizlikgacha bo'lgan chegaralanmagan sohada tor tebranishini

tavsiflovchi Koshi masalasini batafsil tahlil qilaylik. Matematik nuqtai nazardan ushbu masala ikkinchi tartibli bir jinsli giperbolik tenglama uchun boshlang'ich shartlar qo'yilishi orqali ifodalanadi. Bu yerda noma'lum funksiya $u(x,t)$ torning x nuqtasidagi t vaqt momentidagi siljishini bildiradi va tenglama ko'rinishi $u_{tt} = (a^2) * u_{xx}$ shakliga ega bo'ladi. Bu yerda a parametri muhitda to'lqinning tarqalish tezligini ifodalovchi fizik doimiydir. Masalani to'liq shakllantirish uchun $t = 0$ boshlang'ich vaqt momentida torning boshlang'ich holati $u(x,0) = f(x)$ va boshlang'ich tezligi $u_t(x,0) = g(x)$ funksiyalar orqali beriladi. Ushbu tenglamani yechish uchun xarakteristikalar usuli qo'llanilganda, xarakteristik differensial tenglamadan koordinata tekisligini ikkita mustaqil oilaga ajratuvchi $x - at = \text{const}$ va $x + at = \text{const}$ to'g'ri chiziqlari kelib chiqadi. Bu chiziqlar fazoviy-vaqtinchalik (x, t) tekisligida to'lqin energiyasi va axborot tarqaladigan yo'llarni belgilaydi. Dalamber usuli ushbu xarakteristikalar yangi o'zgaruvchilar sifatida foydalanib, umumiy yechimni o'ngga tarqaluvchi $F(x - at)$ va chapga tarqaluvchi $G(x + at)$ tekis to'lqinlarining yig'indisi ko'rinishida izlashni taqozo etadi. Boshlang'ich shartlarni qanoatlantirish natijasida mashhur Dalamber formulasi kelib chiqadi, unga ko'ra yechim boshlang'ich siljish funksiyalarining o'rta arifmetigiga hamda boshlang'ich tezlik funksiyasining xarakteristik nuqtalar orasidagi integraliga teng bo'ladi.

Dalamber formulasi bergan ushbu analitik natija nihoyatda boy geometrik mazmunga ega. Agar biz fazoviy-vaqtinchalik tekislikda ixtiyoriy $M(x_0, t_0)$ nuqtani olsak, shu nuqtadagi tebranish amplitudasini aniqlash uchun M nuqtadan pastga, ya'ni vaqt o'qi teskari yo'nalishi bo'yicha $x - at = x_0 - at_0$ va $x + at = x_0 + at_0$ xarakteristika chiziqlarini o'tkazamiz. Ushbu ikki chiziq $t = 0$ vaqt o'qini (absissa o'qini) mos ravishda $x_0 - at_0$ va $x_0 + at_0$ nuqtalarda kesib o'tadi va koordinata tekisligida uchi M nuqtada bo'lgan xarakteristik uchburchakni hosil qiladi. Absissa o'qida ajralgan ushbu $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ kesma berilgan $M(x_0, t_0)$ nuqta uchun "aniqlanish sohasi" yoki "boshlang'ich shartlarning ta'sir doirasi" deb ataladi. Buning geometrik va fizikaviy ma'nosi shundan iboratki, torning x_0 nuqtasida t_0 vaqt momentida sodir bo'layotgan tebranish holati faqat va faqat shu kesma ichidagi boshlang'ich siljishlar va tezliklarga bog'liqdir. Ushbu kesmaning tashqarisida joylashgan har qanday nuqtadagi boshlang'ich o'zgarishlar t_0 vaqtigacha M nuqtaga yetib kelishga ulgurmaydi, chunki to'lqin tezligi chekli va u a ga teng. Shuningdek, jarayonga teskari tomondan ham qarash mumkin: agar $t = 0$ o'qida biror kichik kesmada boshlang'ich qo'zg'alish berilgan bo'lsa, vaqt o'tishi bilan bu qo'zg'alish yuqoriga yo'nalgan xarakteristikalar chiziqlari bo'ylab kengayib boradi. Bu geometrik konfiguratsiya "ta'sirlar sohasi" deb ataladi va u vaqt o'qi bo'ylab chizilgan konus shakliga ega bo'ladi. Qo'zg'alish berilgan hududdan chiquvchi xarakteristikalar to'lqin frontlari rolini o'ynaydi va fazoni tinch holatdagi va tebranayotgan qismlarga ajratadi.

Cheksiz sohadagi ideal holatdan realroq tizimlarga o'tish yarim chegaralangan

sohalarni ko‘rishni taqozo etadi. Endi torni faqatgina x noldan katta yoki teng ($x \geq 0$) bo‘lgan musbat yarim o‘qda joylashgan va chap uchi $x = 0$ nuqtada qat’iy chegaralangan deb qaraymiz. Bu holda biz faqatgina boshlang‘ich shartlar bilan cheklana olmaymiz, balki tizimning chekka nuqtasidagi xulq-atvorini belgilovchi chegaraviy shartni ham kiritishimiz shart bo‘ladi. Bunday masalalar matematik fizikada "aralash masalalar" deb yuritiladi. Yarim chegaralangan sohada to‘lqinlar harakati cheksiz sohadagidan tubdan farq qiladi, chunki bu yerda to‘lqinlarning chegaraga urilishi va undan qaytishi (yansishi) hodisasi yuz beradi. Agar $x = 0$ nuqtada tor uchi qattiq mahkamlangan bo‘lsa, bu nuqtadagi siljish har doim nolga teng bo‘lishi kerak, ya’ni $u(0,t) = 0$ chegaraviy shart bajariladi. Dastlab $x > 0$ sohada vujudga kelgan va chapga, ya’ni koordinata boshi tomon a tezlik bilan harakatlanayotgan har qanday to‘lqin $x = 0$ to‘siqqa yetib kelgach, undan qaytishga majbur bo‘ladi. Xarakteristikalar usuli ushbu vaziyatda yarim tekislikdagi masalani yechish uchun fazoni matematik jihatdan xayolan kengaytirish va aks ettirish prinsipini taklif etadi.

Ushbu jarayonni geometrik tasvirlash va analitik ifodalash uchun biz musbat sohada berilgan $f(x)$ va $g(x)$ boshlang‘ich funksiyalarini manfiy soha ($x < 0$) ga xayolan davom ettiramiz. $x = 0$ nuqtadagi chegaraviy shart har doim nol bo‘lib qolishi uchun, bu funksiyalar koordinata boshiga nisbatan toq shaklda, ya’ni $f(-x) = -f(x)$ va $g(-x) = -g(x)$ qoidasi bo‘yicha manfiy tomonga uzaytiriladi. Geometrik fazoviy-vaqtinchalik diagrammada bu holat juda chiroyli manzara kasb etadi. Chapga qarab harakatlanayotgan real to‘lqin $x = 0$ chegaraga yaqinlashganda, manfiy sohadan xuddi shu tezlikda unga qarama-qarshi kelayotgan, lekin amplitudasi teskari ishorali bo‘lgan xayoliy (virtual) to‘lqin harakatlanib kelayotgandek bo‘ladi. Ular $x = 0$ nuqtada to‘qnashganda, superpozitsiya (to‘lqinlarning qo‘shilishi) prinsipiga ko‘ra, bir-birini mutlaqo kompensatsiya qiladi va chegaradagi siljishni nolga tenglashtiradi. To‘qnashuvdan so‘ng, manfiy sohadan kelgan teskari ishorali to‘lqin musbat soha ichkarisiga kirib boradi. Real kuzatuvchi uchun bu jarayon chegaraga urilgan to‘lqinning o‘z ishorasini teskarisiga o‘zgartirib (ya’ni fazasini 180 darajaga yangilab), aks etgan holda ortga, ya’ni o‘ngga qarab qaytishi bo‘lib ko‘rinadi. Bu optika va akustikadagi zichroq muhitdan to‘lqinning qaytishi qonuniyatiga to‘liq mos keladi.

Agar chegaraviy shart boshqacha ko‘rinishda bo‘lsa, masalan, torning chap uchi erkin mahkamlangan bo‘lib, unda kuchlanish nolga teng bo‘lsa, chegaraviy shart $u_x(0,t) = 0$ ko‘rinishini oladi. Bunday holda, chegarada hosila nolga teng bo‘lishini ta’minlash uchun boshlang‘ich funksiyalar manfiy sohaga toq emas, balki juft shaklda, ya’ni $f(-x) = f(x)$ qonuniyati bo‘yicha davom ettiriladi. Geometrik nuqtai nazardan, manfiy sohadan kelayotgan xayoliy to‘lqin real to‘lqin bilan mutlaqo bir xil ishoraga va shaklga ega bo‘ladi. Ular $x = 0$ chegarada uchrashganda, bir-birini kuchaytiradi va chegaradagi tebranish amplitudasini ikki barobar oshiradi. Shundan so‘ng, to‘lqin o‘z shaklini va ishorasini saqlab qolgan holda, xuddi ochiq chegaradan qaytgandek, o‘ngga

qarab harakatini davom ettiradi. Fazoviy-vaqtinchalik diagrammalarda ushbu o'tish nuqtalari xarakteristikalarining $x = 0$ o'qi bilan kesishganda sinishi yoki aks etishi sifatida chiziladi. $x > 0$ at sohadagi nuqtalar uchun chegaraning ta'siri hali yetib kelmagan bo'ladi va u yerda yechim oddiy cheksiz sohadagi Dalamber formulasi bilan aniqlanadi. Ammo $x < 0$ at sohasiga o'tilganda, aniqlanish uchburchagining chap qanoti $x = 0$ o'qini kesib o'tadi va manfiy sohaga o'tgan xarakteristika chizig'ini yuqorida aytilgan toq yoki juft davom ettirish qoidasi bo'yicha musbat sohaga qayta qaytarish (aks ettirish) talab etiladi.

Xulosa o'rnida aytish mumkinki, tor tebranish tenglamalari uchun Koshi va aralash masalalarni xarakteristikalar usuli yordamida tadqiq etish matematik tahlilning eng ko'rgazmali va mukammal namunalaridan biridir. Ushbu usul murakkab differensial operatorlar muammosini xarakteristik to'g'ri chiziqlar va to'lqin frontlarining geometriyasiga olib keladi. Fazoviy-vaqtinchalik koordinatalarda aks ettirish prinsiplari, aniqlanish va ta'sirlar sohalarining geometrik konfiguratsiyalari fizik jarayonlarning to'liq vizual modelini yaratadi. Ushbu nazariy yondashuv zamonaviy to'lqinlar mexanikasi, qurilish konstruksiyalarining tebranishlari tahlili, seysmologiya va gidrodinamika masalalarini kompyuterda modellashtirish hamda hisoblash algoritmlarini yaratishda fundamental asos bo'lib xizmat qilmoqda.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Yodgorov N.J. Fazoviy almashtirishlar jarayonida o'quvchilarning bilish faoliyatini rivojlantirish omillari. Nomzodlik dissertatsiyasi. -T.: 2009-y., 142 b
2. Murodov Sh., Hakimov L., Xolmurzayev A. Chizma geometriya. -Toshkent: "Iqtisod-moliya", 2008-yil
3. Salohiddinov, M. S. *Matematik fizika tenglamalari*. Toshkent: "O'zbekiston" nashriyoti. 2002-yil
4. Valiyev A.N., Jo'rayeva M.U. Chizma geometriyada masalalar yechishni o'qitishda jarayonida talabalarning fazoviy tasavvurini rivojlantirish imkoniyatlari. "ORIENTAL RENAISSANCE: INNOVATIVE, EDUCATIONAL, NATURAL AND SOCIAL SCIENCES SCIENTIFIC JOURNAL", 2022- yil, May. Volume 2, № 5 2022. 399-409 betlar, DOI: 10.24412/2181-1784-2022-5-399-409